RW, D-MATL, D-MAVT — Stochastik — HS 2013

Prof. Dr. P. Embrechts

Übungsserie 1

1. Mit einem Würfel wird N Mal gewürfelt. Seien A_k das Ereignis, dass beim k-ten Mal eine 3 gewürfelt wird und B_k das Ereignis, dass beim k-ten Mal eine 6 gewürfelt wird.

a) Wir definieren die Ereignisse A, B, C folgendermaßen:

A … „6 wird nie gewürfelt",

B … „Mindestens einmal wird 3 gewürfelt",

C … „Mindestens einmal wird 6 und mindestens zweimal wird 3 gewürfelt".

Drücke diese Ereignisse in Formeln mit Hilfe der Ereignisse A_k, B_k $(k = 1, \ldots, N)$ aus.

b) Beschreibe in Worten die drei Ereignisse

$$\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i^c\right)^c \qquad \bigcup_{i=1}^{N-2} (A_i \cap A_{i+1} \cap B_{i+2}) \qquad \bigcap_{i=1}^{N-1} (A_i \cup B_{i+1}).$$

2. Eine Maschine A schaltet sich zufällig zwischen 4 Uhr und 16 Uhr ein und nach 2 Stunden wieder aus. Eine andere Maschine B schaltet sich irgendwann zwischen 8 Uhr und 24 Uhr ein und nach 4 Stunden wieder aus. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

E_1 = „A und B schalten sich frühestens um 12 Uhr ein."
E_2 = „A und B schalten sich gleichzeitig aus."
E_3 = „Zu keinem Zeitpunkt laufen A und B gleichzeitig."

Suche einen passenden Grundraum und charakterisiere in diesem die obigen Ereignisse. Hierbei bietet sich eine graphische Veranschaulichung an.

3. Wir werfen gleichzeitig einen roten und einen grünen Würfel und betrachten die folgenden Ereignisse:

W_1 = „Keine der beiden gewürfelten Zahlen ist grösser als 2."
W_2 = „Der rote Würfel zeigt dieselbe Zahl wie der grüne Würfel."
W_3 = „Die Zahl auf dem roten Würfel ist das Doppelte der Zahl auf dem grünen Würfel."
W_4 = „Die Zahl auf dem roten Würfel ist um eins grösser oder kleiner als die Zahl

auf dem grünen Würfel.“
W_5 = „Wenn die Zahl auf dem roten Würfel höchstens 5 ist, zeigt der grüne Würfel eine 6.“

Wähle einen geeigneten Grundraum Ω und identifiziere die obigen Ereignisse mit Teilmengen von Ω. Von welchen der obigen Ereignisse kann man entscheiden, ob sie eintreten, wenn man das Würfeln zwar beobachtet, aber farbenblind ist, so dass man rot und grün nicht unterscheiden kann?

4. Seien A_i, $i = 1, \ldots, n$, beliebige Ereignisse, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Es gilt dann folgende Regel:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}]$$

a) Beweise diese Formel durch Induktion nach n.

b) Gegeben sei nun ein Schaltsystem mit drei parallel angeordneten Schaltern R_1, R_2 und R_3, die (zufällig) offen oder geschlossen sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass R_1 bzw. R_2 bzw. R_3 geschlossen ist, sei 0.6 bzw. 0.55 bzw. 0.5. Die Wahrscheinlichkeit, dass R_1 und R_2 bzw. R_1 und R_3 bzw. R_2 und R_3 geschlossen sind, sei jeweils 0.25, und mit Wahrscheinlichkeit 0.1 seien alle Schalter geschlossen.

Berechne mit Hilfe obiger Formel die Wahrscheinlichkeit, dass das System stromdurchlässig ist, d.h. dass mindestens ein Schalter geschlossen ist.

c) n Personen haben mit ihrem Passwort Zugang zu einem Rechner. Nehmen wir an, dass die Passwörter alle verschieden sind. Durch einen Fehler wird die Tabelle, welche die Benutzernamen mit den passenden Passwörtern speichert zufällig durchmischt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann sich nach dem Fehler keine Person mehr einloggen?

Abgabe: Montag, 30. September, bzw. Dienstag, 01. Oktober in den Übungsstunden oder *vor* den Übungen in den Fächern im HG E 65.
Präsenz: Montag und Donnerstag, 12-13 Uhr im HG G 32.6.
Homepage:
`www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/stochastik_MAVT`