Übungsserie 10

1. Um die Höhe der Prämie einer Versicherung gegen Feuer zu bestimmen, untersucht eine Versicherungsgesellschaft die Feuerschäden der letzten Jahre. Weil für den Versicherer insbesondere Grossschäden kostspielig sind, ist es für ihn besonders wichtig, Feuerschäden, die x_0 Franken übersteigen, gut zu modellieren.
Häufig wird für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Kosten der Schäden, die eine Schranke x_0 überschreiten, eine Pareto-Verteilung verwendet. Sie hat die Dichte:

$$f(x|x_0,\vartheta) = \begin{cases} \vartheta \cdot x_0^{\vartheta} \cdot x^{-\vartheta-1} & \text{falls } x \geq x_0;\ \vartheta > 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im letzten Jahr betrugen die Feuerschäden, die $x_0 = 2 \cdot 10^6$ Franken überstiegen:

$6.45 \cdot 10^6$, $2.74 \cdot 10^6$, $3.50 \cdot 10^6$, $2.57 \cdot 10^6$, $2.91 \cdot 10^6$, $2.50 \cdot 10^6$,
$2.61 \cdot 10^6$, $2.32 \cdot 10^6$, $2.68 \cdot 10^6$, $2.22 \cdot 10^6$, $2.28 \cdot 10^6$, $2.48 \cdot 10^6$.

a) Schätze den Parameter ϑ mit der Momentenmethode (x_0 bekannt).

b) Warum muss man $\vartheta > 1$ voraussetzen?

c) Schätze den Parameter ϑ mit der Maximum-Likelihood-Methode (x_0 bekannt).

d) Berechne die Wahrscheinlichkeit

$$P[\text{“Feuerschaden”} \geq 2 \cdot x_0].$$

in Abhängigkeit von ϑ und x_0.

2. Von einem bestimmten technischen Bauteil sei bekannt, dass es mindestens 1000 Tage funktioniert und eine Höchstlebensdauer ϑ in Tagen besitzt, nach der es auf jeden Fall unbrauchbar wird. Diese Höchstlebensdauer sei jedoch nicht bekannt. Die beobachtete Lebensdauer des Bauteils kann modelliert werden mit einer uniformen Verteilung zwischen 1000 und der Höchstlebensdauer, also gemäss der Dichte

$$f(x|\vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta - 1000} & \text{falls } 1000 \leq x \leq \vartheta; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Von 11 verschiedenen (unabhängigen) Exemplaren dieses Bauteils wurde die Lebensdauer in Tagen beobachtet:
2332, 2567, 5005, 1977, 3840, 2968, 3217, 1319, 2582, 3420, 1789.

Bitte wenden!

a) Schätze den Parameter ϑ mit der Momentenmethode.

b) Schätze den Parameter ϑ mit der Maximum-Likelihood-Methode.

Vorsicht: Die Likelihoodfunktion ist nicht differenzierbar.

c) Ist die Schätzung gemäss der Momentenmethode sinnvoll? Kurze Begründung.

3. Eine Population von Insekten besteht aus n Individuen. Jedes Insekt weist unabhängig von den anderen mit derselben Wahrscheinlichkeit p eine bestimmte Krankheit auf. Mit anderen Worten, seien $X_1, \ldots, X_n$ iid Zufallsvariablen mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1 - p$, wobei das Ereignis $\{X_i = 1\}$ als "Insekt i ist krank" interpretiert wird.

a) Bestimme den Maximum-Likelihood Schätzer für den Parameter p.

b) Ist der Schätzer aus **a)** erwartungstreu?

Man teilt die Insekten in m Gruppen mit jeweils k ($k \ll n$) Individuen auf

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit q befindet sich in einer bestimmten Gruppe mindestens ein krankes Insekt?

d) Finde für m Gruppen den Maximum-Likelihood Schätzer für q und leite daraus einen Schätzer für p her.

4. Der Flächeninhalt eines Quadrates der unbekannten Seitenlänge μ soll geschätzt werden. Dazu werden n unabhängige Messungen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ der Seitenlänge durchgeführt, die zufälligen Schwankungen unterworfen seien. Die X_i haben Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Als Schätzer für den Flächeninhalt kann man nun $\bar{X}_n^2$ wählen.

a) Ist dieser Schätzer erwartungstreu, dh. gilt die Gleichung $E(\bar{X}_n^2) = \mu^2$?

b) Um einen erwartungstreuen Schätzer zu erhalten, betrachte Schätzer der Form $\bar{X}_n^2 - kS^2$, wobei

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$$

und k eine beliebige reelle Zahl ist. Welchen Wert muss man für k wählen, um einen erwartungstreuen Schätzer zu erhalten?

Abgabe: Montag, 2. Dezember, bzw. Dienstag, 3. Dezember in den Übungsstunden oder *vor* den Übungen in den Fächern im HG E 65.
Präsenz: Montag und Donnerstag, 12-13 Uhr im HG G 32.6.
Homepage:
`www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/stochastik_MAVT`