Übungsserie 12

1. Die Anreicherung einer Legierung mit einem Metall soll den Volumenausdehnungskoeffizienten, der bei der Standardlegierung (ohne Anreicherung) 1.0085 beträgt, reduzieren. Um diese Hypothese nachzuprüfen, wurde der Koeffizient an 12 Proben der neuen Legierung bei gleicher Temperaturänderung gemessen, mit folgenden Ergebnissen:

1.00781	1.00646	1.00801	1.00833	1.00738	1.00687
1.00783	1.00936	1.00564	1.00543	1.00794	1.01060,

die zugehörigen empirischen Werte sind $\overline{x}_{12} = 1.00764$ und $s_{12} = 0.00146$, außerdem nehmen wir an, dass diese Daten normalverteilt sind.

a) Konstruiere das 99%-Vertrauensintervall für den Parameter μ.

b) Lässt sich auf dem Niveau von 5% tatsächlich nachweisen, dass der Volumenausdehnungskoeffizient der neuen Legierung kleiner ist? Formuliere dazu geeignete Hypothesen, gib an ob der Test ein- oder zweiseitig ist, und führe den Test durch.

c) Gib das kleinste Niveau an, bei dem der Test aus b) die Nullhypothese (gerade noch) verwirft. Wie heisst dieses kritische Niveau?

Wir idealisieren nun die Situation und nehmen an, dass $\sigma = 0.0014$ bekannt ist.

d) Bestimme den Verwerfungsbereich des analogen (jetzt σ bekannt) Tests aus b). Wie lautet nun die Teststatistik und wie entscheidet dieser Test?

e) Berechne die Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers 2. Art für den in d) bestimmten Test, wenn der wahre Wert $\mu = 1.008$ bzw. $\mu = 1.007$ ist.

f) Wie groß muss der Stichprobenumfang n gewählt werden, damit das (zweiseitige) Vertrauensintervall zum 5% Niveau schmäler als 0.0002 ist? Welcher empirisch gemessene Mittelwert würde dann schon zum Verwerfen der Nullhypothese führen?

Bitte wenden!

2. Bei einem Gerät zur Messung von Luftschadstoffen soll überprüft werden, ob es die richtigen Werte angibt. Dazu werden in einen geschlossenen Raum 20 *ppm* CO gespeist und dann vom Gerät zehnmal gemessen. Die folgenden Konzentrationen (in *ppm* CO), welche in guter Näherung als normalverteilt angenommen werden können, werden abgelesen:

$$20.1,\ 20.3,\ 21.4,\ 19.2,\ 22.2,\ 20.1,\ 20.2,\ 20.4,\ 20.2,\ 20.3\,.$$

Kennzahlen: $\overline{x}_{10} = 20.44,\ s_{10}^2 = 0.660,\ s_{10} = 0.813.$

a) Formuliere passende Null- und Alternativhypothesen und führe aus dem 5% Niveau den t-Test, und unter der Annahme das $\sigma = 0.800\,ppm$ bekannt sei, auch den z-Test durch.

b) Berechne in beiden Fällen das zugehörige 95%-Vertrauensintervall.

3. In einem Experiment soll herausgefunden werden, ob Roboter eingesetzt werden können um Computerkabel herzustellen. Ein Roboter wurde verwendet um 500 Kabel zu produzieren. Die Kabel wurden untersucht und 14 waren fehlerhaft. Werden die Kabel von Menschen hergestellt ist die Ausschussrate 4%. Unterstützt dieses Experiment die These, dass Roboter zuverlässiger sind bei der Kabelherstellung als Menschen? Formuliere eine geeignete Nullhypothese und Alternative und berechne den P-Wert. Wird die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen?

4. Ein Klimaanlage ist auf eine Raumtemperatur von 20° Celsius eingestellt, sie schafft es die Raumtemperatur bis auf eine Standardabweichung von einem halben Grad Celsius konstant zu halten. An zehn aufeinanderfolgenden Tagen wurden die folgenden Temperaturen gemessen:

$$20.71 \quad 19.76 \quad 20.56 \quad 21.39 \quad 21.00 \quad 19.67 \quad 20.92 \quad 20.31 \quad 20.39 \quad 20.72.$$

Aus diesen Daten ergibt sich $\overline{x}_{10} = 20.543$.

a) Nimm an, dass die Daten normalverteilt sind und entwirf einen entsprechenden Test auf dem 2%-Niveau, um zu beurteilen, ob die Klimaanlage richtig geeicht ist. Führe anschließend den Test durch. Wie groß ist der P-Wert zur gegebenen Realisierung? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test erkennt dass die Klimaanlage neu geeicht werden muss, wenn der tatsächliche Mittelwert der Raumtemperatur $\mu = 20.6°$ beträgt? Wie heißt diese Wahrscheinlichkeit?

b) Führe jetzt einen Vorzeichen-Test zum selben Niveau wie oben durch. Wie lautet hier die Teststatistik und wie ist sie verteilt? Gib die Hypothesen und den Verwerfungsbereich an. Wie entscheidet der Test? Wie groß ist der P-Wert für die gegebene Realisierung?

Siehe nächstes Blatt!

c) Berechne die Macht beider Tests unter der Annahme, dass der tatsächliche Erwartungswert der Raumtemperatur $\mu = 20.6^\circ$ beträgt.

Hinweis zur Berechnung der Macht für den Test in b): Wie groß ist die Warscheinlichkeit dass die Temperatur über 20° ist wenn $\mu = 20.6^\circ$ ist?

Abgabe: Montag, 16. Dezember, bzw. Dienstag, 17. Dezember in den Übungsstunden oder *vor* den Übungen in den Fächern im HG E 65.
Präsenz: Montag und Donnerstag, 12-13 Uhr im HG G 32.6.
Homepage:
`www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/stochastik_MAVT`