

Übungsserie 3

1. Sei X eine diskrete Zufallsvariable welche nur die Werte $W = \{1, \pi, 7, 8.6, 11\}$ annimmt. Die folgenden Wahrscheinlichkeiten sind gegeben:

$$P[X = 1] = \frac{1}{16} \quad P[X = \pi] = \frac{3}{8} \quad P[X = 7] = \frac{1}{8} \quad P[X = 8.6] = \frac{1}{4}.$$

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P[X = 11]$?
 - b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass X nur ganzzahlige Werte annimmt?
 - c) Berechne den Erwartungswert $E[X]$.
 - d) Berechne die Standardabweichung σ_X .
 - e) Berechne den Erwartungswert $E[\ln X]$.
2. Eine Rohrleitung besteht aus 20 Segmenten. Da die Ausflussmenge kleiner ist als die Zuflussmenge, muss irgendwo ein Leck bestehen. Wir nehmen an, dass es genau ein Leck gibt und dass es mit Wahrscheinlichkeit $1/20$ in einem bestimmten Segment liegt. Wir möchten das defekte Segment mit möglichst wenigen Inspektionen ausfindig machen. Unter einer Inspektion verstehen wir das Messen der Durchflussmenge an einer Segmentgrenze.
- a) Bestimme die Verteilung der Anzahl Inspektionen X , wenn man sukzessive jede Segmentgrenze inspiziert. Berechne ferner $E[X]$ und $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$.
 - b) Suche eine günstigere Strategie und bestimme dafür wiederum die Verteilung, den Erwartungswert und die Standardabweichung der Anzahl Inspektionen.
3. Für eine externe Benutzergruppe, der auch Franz angehört, stehen an der ETH vier Rechner zur Verfügung, wobei jedem Benutzer beim Einloggen jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ unabhängig von den anderen einer der Rechner zugeteilt wird. Es kann also durchaus vorkommen, dass mehrere Leute auf dem gleichen Rechner arbeiten.
- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Person auf dem gleichen Rechner arbeitet wie Franz, wenn ausser ihm genau 10 Personen eingeloggt sind?
 - b) Wieviele Leute dürfen sich ausser Franz noch einloggen, damit er mindestens mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ allein auf einem Rechner arbeitet?

Bitte wenden!

c) Wir nehmen nun an, dass jeder Rechner unabhängig von den anderen nur mit Wahrscheinlichkeit 0.9 funktioniert, wobei die Benutzer analog wie vorher auf die funktionierenden Rechner “verteilt” werden. Gegeben, dass ausser Franz drei Leute eingeloggt sind und genau zwei davon auf dem gleichen Rechner arbeiten wie er, wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass alle Rechner funktionieren?

4. k Jäger schiessen gleichzeitig je einmal auf einen Schwarm aus m Enten. Sie suchen sich unabhängig voneinander die Ente aus, auf die sie zielen, und treffen diese unabhängig voneinander und unabhängig von der Wahl der Ente mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$.

Führe für jede Ente eine Zufallsvariable X_n ein, die angibt, ob die Ente getroffen wurde oder nicht. D.h. es soll gelten $\{X_n = 1\} = \{n\text{-te Ente nicht getroffen}\}$ und $\{X_n = 0\} = \{n\text{-te Ente getroffen}\}$.

a) Welche Verteilung haben die X_n ?

b) Wie gross ist die erwartete Anzahl unverletzter Enten?

c) Sind die X_n , $n = 1, \dots, m$ unabhängig? Untersuche nur den Fall $k < m$.

Abgabe: Montag, 14. Oktober, bzw. Dienstag, 15. Oktober in den Übungsstunden oder vor den Übungen in den Fächern im HG E 65.

Präsenz: Montag und Donnerstag, 12-13 Uhr im HG G 32.6.

Homepage:

www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/stochastik_MAVT