Übungsserie 5

1. Der Widerstand R einer serienmässig produzierten elektrischen Komponente sei in guter Approximation normalverteilt mit $\mu = 1000$ Ohm und $\sigma^2 = 50$ Ohm^2.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass R zwischen 990 und 1010 Ohm liegt.

b) Berechne das 10%-Quantil der Verteilung von R.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass R über 1020 Ohm liegt.

d) Eine Messung hat ergeben, dass R über 1010 Ohm liegt. Berechne die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass dann R über 1020 Ohm liegt.

2. Die Geschwindigkeit X eines Teilchens der Masse m sei durch die sogenannte *Rayleigh Verteilung* modelliert, d.h. X hat die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

a) Zeige, dass f eine Dichte ist.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen eine Geschwindigkeit zwischen 2 und 5 besitzt.

c) Berechne die Verteilungsfunktion der kinetischen Energie $Y = \frac{1}{2}mX^2$ sowie ihren Erwartungswert. Wie heisst die Verteilung von Y?

3. Der Radius von kugelförmigen Teilchen sei uniform verteilt auf dem Intervall $[10, 100]\mu m$.

a) Berechne die Dichte des Volumens.

b) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung des Volumens dieses Teilchens.

c) Zeige: Wenn der Radius lognormal verteilt ist, dann ist auch das Volumen lognormal verteilt.

Bitte wenden!

4. Ein häufig benutztes Modell in der Rückversicherung zur Abdeckung grosser Schäden ist ein sogenannter "Excess-of-Loss" Vertrag. Gegen Bezahlung einer Prämie verpflichtet sich dabei die Rückversicherungsgesellschaft, allfällige Schäden, welche ein bestimmtes Level von x_0 CHF übersteigen, zu übernehmen.
Um die Höhe der Prämie zu bestimmen, untersucht die Gesellschaft die Grossschäden (Schäden $> x_0$) des letzten Jahres. In guter Näherung können solche Grossschäden durch eine Zufallsvariable X modelliert werden, wobei X eine sogenannte Pareto-Verteilung besitzt:

$$F_X(x; x_0, \alpha) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha} & x \geq x_0,\ \alpha > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Wie teuer ist ein einzelner Grossschaden im Mittel?

b) Die Netto-Jahresprämie berechnet sich zu $P_{net} = E[X]E[N]$. Dabei werde durch $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ die (zufällige) Anzahl Grossschäden pro Jahr modelliert. Wie gross ist die Prämie P_{net} für $\alpha = 2,\ x_0 = 2 \cdot 10^6$ CHF und $\lambda = 3$?

c) Ein Zufallszahlengenerator für die uniforme Verteilung auf $[0, 1]$ liefert die folgenden zwei Werte: $0.237,\ 0.733$.
Berechne daraus zwei Realisierungen einer Pareto-verteilten Zufallsvariable mit $\alpha = 2$ und $x_0 = 2 \cdot 10^6$ CHF.

Abgabe: Montag, 28. Oktober, bzw. Dienstag, 29. Oktober in den Übungsstunden oder *vor* den Übungen in den Fächern im HG E 65.
Präsenz: Montag und Donnerstag, 12-13 Uhr im HG G 32.6.
Homepage:
`www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/stochastik_MAVT`