RW, D-MATL, D-MAVT | Stochastik | HS 2013
Prof. Dr. P. Embrechts

Übungsserie 8

1. Wir bezeichnen mit X_i, $i \in \mathbb{N}$, die letzte Ziffer von D_i^2, wobei D_i eine zufällige Ziffer zwischen 0 und 9 ist mit $P[D_i = k] = \frac{1}{10}$ für $k \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Wir nehmen an, dass die D_i unabhängig sind. $D_i = 8$ zum Beispiel liefert $D_i^2 = 64$ und daraus $X_i = 4$. Wir definieren

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}\ , \qquad S_n = X_1 + \cdots + X_n\ .$$

a) Bestimme den Wertebereich $\mathcal{W}$ von X_i und $P[X_i = \ell]$ für $\ell \in \mathcal{W}$.

b) Welchem Wert m nähert sich $\bar{X}_n$ für grosse Werte von n?

c) Falls du die erste Ziffer von $\bar{X}_{100}$ voraussagen müsstest, auf welche Ziffer würdest du setzen, damit die Wahrscheinlichkeit richtig zu tippen, möglichst gross wird? Wie gross ist diese Wahrscheinlichkeit approximativ?

Hinweis: Beachte Teilaufgabe **b)**.

2. Um zu verhindern, dass ein elektrisches Gerät infolge eines defekten Halbleiters längere Zeit ausfällt, werden zwei identische, parallel geschaltete Halbleiter zu einem elektrischen Bauteil zusammengefasst. Eine Kontrollampe leuchtet auf, wenn einer der beiden Halbleiter ausgefallen ist. Wir nehmen an, dass die Lebensdauern der Halbleiter unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 60 Tage sind.

a) Wie ist die Zeit, nach der die Kontrollampe aufleuchtet, verteilt?

b) Sobald die Kontrollampe aufleuchtet, wird das Bauteil durch ein neues mit zwei funktionstüchtigen Halbleitern ersetzt. Wie gross ist approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von zwei Jahren mehr als 38 Ersatzbauteile benötigt werden? Wir vereinbaren, dass das erste Bauteil noch nicht als Ersatzbauteil bezeichnet werde.

3. Nehme an, die Firma Meteo-Tropical arbeite mit folgendem Modell für die Niederschlagsmenge in den Tropen. Die Zufallsvariable X beschreibe die tägliche Niederschlagsmenge in mm und die zugehörige Dichte sei gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-\eta x} & ,\quad x \geq 0, \\ 0 & ,\quad \text{sonst,} \end{cases}$$

für $c, \eta > 0$.

Bitte wenden!

a) Wie muss c für ein fest vorgegebenes η gewählt werden, damit f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt?

Es bezeichne X_i die Niederschlagsmenge in mm am Tag $i \geq 1$. Wir nehmen an, dass die Niederschlagsmengen an verschiedenen Tagen unabhängig voneinander sind und die gleiche Verteilung haben wie X.

b) Wir betrachten nun eine Zeitperiode von $n = 100$ Tagen. Für diese Periode sei aufgrund von Erfahrungswerten $c = \eta = 1/5$ bekannt, d.h. $E[X_1] = 5$ mm und $\sqrt{Var(X_1)} = 5$ mm. Berechne mittels einer geeigneten Approximation die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser 100-tägigen Periode insgesamt mehr als 550 mm Niederschlag fällt.

c) Wir reden von einem "Monsuntag", falls die Niederschlagsmenge an jenem Tag mehr als 10 mm beträgt. Es sei $L = \min\{k \geq 1 | X_k \text{ ist ein Monsuntag}\}$. Die Zufallsvariable L besitzt also eine geometrische Verteilung, d.h. $L \sim \text{Geom}(p)$. Welchen Wert hat p falls wiederum $c = \eta = 1/5$ angenommen wird?

4. Berechne mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.

Abgabe: Montag, 18. November, bzw. Dienstag, 19. November in den Übungsstunden oder *vor* den Übungen in den Fächern im HG E 65.
Präsenz: Montag und Donnerstag, 12-13 Uhr im HG G 32.6.
Homepage:
`www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/stochastik_MAVT`