Serie 1

Aufgabe 1

(A1) Sei $p \in E$ beliebig. Dann gilt

$$(\varphi \circ \mathrm{Id})(p) \overset{\text{Definition von } \circ}{=} \varphi(\mathrm{Id}(p)) \overset{\text{Definition von Id}}{=} \varphi(p) \qquad (1)$$

sowie
$$(\mathrm{Id} \circ \varphi)(p) \overset{\text{Definition von } \circ}{=} \mathrm{Id}(\varphi(p)) \overset{\text{Definition von Id}}{=} \varphi(p) \qquad (2)$$

$(1) \wedge (2) \Rightarrow \forall p \in E$ gilt $(\varphi \circ \mathrm{Id})(p) = (\mathrm{Id} \circ \varphi)(p)$ $\square$

(A2) Sei $p \in E$ beliebig.

Definiere $\forall x \in E \quad f(x) := (\psi_1 \circ \psi_2)(x) = \psi_1(\psi_2(x)) \qquad (1)$

$\forall y \in E \quad g(y) := (\psi_2 \circ \psi_3)(y) \overset{\text{Def. „}\circ\text{“}}{=} \psi_2(\psi_3(y)) \qquad (2)$

Dann gilt

$$((\psi_1 \circ \psi_2) \circ \psi_3)(p) \overset{\text{Def von } f}{=} (f \circ \psi_3)(p)$$
$$\overset{\text{Def „}\circ\text{“}}{=} f(\psi_3(p))$$
$$\overset{(1) \text{ für } x = \psi_3(p)}{=} \psi_1(\psi_2(\psi_3(p))) \qquad (3)$$

sowie
$$(\psi_1 \circ (\psi_2 \circ \psi_3))(p) \overset{\text{Def } g}{=} (\psi_1 \circ g)(p)$$
$$\overset{\text{Def } \circ}{=} \psi_1(g(p))$$
$$\overset{(2)}{=} \psi_1(\psi_2(\psi_3(p))) \qquad (4)$$

$(3) \wedge (4) \Rightarrow \forall p \in E$ gilt $((\psi_1 \circ \psi_2) \circ \psi_3)(p) = (\psi_1 \circ (\psi_2 \circ \psi_3))(p)$ $\square$

Aufgabe 2

Behauptung 2.1 Punkte auf einer Geraden in E werden durch eine Isometrie auf Punkte auf einer Geraden abgebildet.

Beweis

Wir verwenden die folgende Definition einer Geraden: Drei Punkte $P, Q, R \in E$ liegen auf einer Geraden wenn

$$d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$$

oder $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$

oder $d(Q,P) + d(P,R) = d(Q,R)$ gilt.

Seien nun $P, Q, R \in E$ drei Punkte, die auf einer Geraden liegen und $I: E \to E$ eine Isometrie. Dann. OBdA

$$\underbrace{d(P,Q)}_{= d(I(P),I(Q))} + \underbrace{d(Q,R)}_{d(I(Q),I(R))} = \underbrace{d(P,R)}_{d(I(P),I(R))}$$

$$\Rightarrow \quad d(I(P),I(Q)) + d(I(Q),I(R)) = d(I(P),I(R))$$

d.h. $I(P)$, $I(Q)$ und $I(R)$ liegen auf einer Geraden. $\square$

Behauptung 2.1' Drei Punkte $P, Q, R \in E$, die nicht auf einer Geraden liegen werden durch eine Isometrie auf drei Punkte abgebildet, die nicht auf einer Geraden liegen.

Beweis

Liegen P, Q, R nicht auf einer Geraden, dann gilt

$$d(P,Q) + d(Q,R) \neq d(P,R),$$

$$d(P,R) + d(R,Q) \neq d(P,Q)$$

$$\text{und} \quad d(Q,P) + d(P,R) \neq d(Q,R).$$

Da eine Isometrie I Distanzen erhält folgt damit auch dass

$$d(I(P),I(Q)) + d(I(Q),I(R)) \neq d(I(P),I(R)),$$

$$d(I(P),I(R)) + d(I(R),I(Q)) \neq d(I(P),I(Q))$$

$$\text{und} \quad d(I(Q),I(P)) + d(I(P),I(R)) \neq d(I(Q),I(R)).$$

Also liegen $I(P)$, $I(Q)$ und $I(R)$ nicht auf einer Geraden $\square$

Behauptung 2.2 Eine Isometrie $I: E \to E$ mit $I(\Delta) = \Delta$ bildet die Eckpunkte von Δ auf die Eckpunkte von Δ ab.

Beweis

Seien P_1, P_2 und P_3 die Eckpunkte von Δ und $P_1' := I(P_1)$, $P_2' := I(P_2)$, $P_3' := I(P_3)$. Dann gilt mit Behauptung 2.1

$$I((P_1P_2)) \subset (P_1'P_2')$$

$$I((P_2P_3)) \subset (P_2'P_3')$$

und $$I((P_3P_1)) \subset (P_3'P_1').$$

Da $P_1 \in (P_1P_2) \cap (P_3P_1)$ folgt $P_1' \in (P_1'P_2') \cap (P_3'P_1')$.

Weiterhin gilt dass P_1', P_2' und P_3' nicht auf einer Geraden liegen, weil P_1, P_2 und P_3 nicht auf einer Geraden liegen und Behauptung 2.1' gilt. Also schneiden sich $(P_1'P_2')$ und $(P_3'P_1')$ in genau einem Punkt, sodass

$$\{P_1'\} = (P_1'P_2') \cap (P_3'P_1').$$

Genauso gilt

$$\{P_2'\} = (P_1'P_2') \cap (P_2'P_3')$$

und $$\{P_3'\} = (P_2'P_3') \cap (P_3'P_1')$$ $\square$

Behauptung 2.3 Eine Isometrie ist durch die Bilder dreier nicht-kolinearer Punkte bestimmt.

Beweis

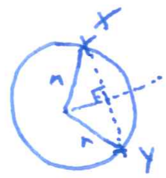
Seien $P, Q, R \in E$ nicht kolinear, $I: E \to E$ eine Isometrie und setze $P' := I(P)$, $Q' := I(Q)$, und $R' := I(R)$.

Sei $S \in E$ und $S' := I(S)$. Wir wollen zeigen, dass S' eindeutig durch P, Q, R bestimmt wird.

Es gilt

$$S \in \underbrace{\partial B(P, d(P,S))}_{=: K_P} \cap \underbrace{\partial B(Q, d(Q,S))}_{=: K_Q} \cap \underbrace{\partial B(R, d(R,S))}_{=: K_R} . \quad (*)$$

Des weiteren befindet sich das Zentrum eines Kreises mit zwei vorgegebenen Punkten X und Y auf der Geraden welche durch den Mittelpunkt von XY und orthogonal zu (XY) verläuft. Treffen sich also drei Kreise in zwei Punkten, dann sind ihre Zentren kolinear. P, Q und R sind nicht kolinear $\Rightarrow$ $\# K_P \cap K_Q \cap K_R \leq 1$



Gleichschenklig
$\Rightarrow$ das Lot trifft Mittelpk von XY

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad K_P \cap K_Q \cap K_R = \{S\}. \quad (**)$$

In der Übungsstunde haben wir bewiesen, dass Kreise bijektiv auf Kreise abgebildet werden.

$$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \# \, I(K_P) \cap I(K_Q) \cap I(K_R) = 1 \,. \quad (***)$$

Ausserdem wissen wir, dass

$$S' \in \underbrace{\partial B(P', d(P', S'))}_{= I(K_P)} \cap \underbrace{\partial B(Q', d(Q', S'))}_{I(K_Q)} \cap \underbrace{\partial B(R', d(R', S'))}_{I(K_R)} ,$$

sodass mit (***) folgt, dass

$$\{S'\} = I(K_P) \cap I(K_Q) \cap I(K_R)$$

$\boxtimes$

Beweis des Satzes I. 1

Sei $I: E \to E$ eine Isometrie mit $I(\Delta) = \Delta$. Mit Behauptung 2.2. bildet I die Ecken von Δ auf die Ecken von Δ ab. Mit Behauptung 2.3 wird I durch diese Bilder eindeutig bestimmt. Die sechs verschiedenen Möglichkeiten die Ecken von Δ auf die Ecken von Δ abzubilden werden durch die Elemente von G aber alle realisiert. Also beinhaltet G alle Isometrien der Ebene die Δ auf Δ abbilden. Umgekert bilden alle Elemente von G Δ auf Δ ab und sind Isometrien. $\boxtimes$

Aufgabe 3

* $2 \cdot 3 = 6$

  $\not\equiv 2 \mod 6$ also ist 3 kein neutrales Element

  $\not\equiv 3 \mod 6$ also ist 2 kein neutrales Element

* $3 \cdot 4 = 12 \equiv 0 \mod 6$

  $\not\equiv 3 \mod 6$ also ist 4 kein neutrales Element

* $4 \cdot 5 = 20 \equiv 2 \mod 6$

  $\not\equiv 4 \mod 6$ also ist 5 kein neutrales Element.

* $0 \cdot 1 = 0 \not\equiv 1 \mod 6$ also ist 0 kein neutrales Element

* $\forall g \in G$ gilt $0 \cdot g = 0$, d.h., $\nexists g \in G: \; 0 \cdot g = 1$, also ist 1 kein neutrales Element.

Also: Nein.

Aufgabe 4

Da die Identität eine Isometrie ist und Isometrien insbesondere Abbildungen sind gelten (G1) und (G3) dank Aufgabe 1a) und 1b).

Es bleibt zu zeigen, dass jede Isometrie bijektiv ist und ihre Inverse Funktion ebenfalls eine Isometrie ist.

Sei I eine Isometrie auf E.

1. I ist injektiv

Seien $p \neq q$ Punkte in E. Dann gilt

$$d(I(p), I(q)) = d(p,q) > 0$$

$$\overset{d \text{ metrik}}{\Rightarrow} \quad I(p) \neq I(q)$$

2. I ist surjektiv

Seien $P, Q, R \in E$ nicht kolinear. Dann sind ihre Bilder $P' := I(P)$, $Q' := I(Q)$ und $R' := I(R)$ wegen Behauptung 2.1' ebenfalls nicht kolinear. Sei $S' \in E$ beliebig. Wir suchen nun einen Punkt $S \in E$ mit $I(S) = S'$.

Da P', Q', R' nicht kolinear sind gilt wie im Beweis von Behauptung 2.3

(1) $$\{S'\} = \partial B(P', d(P',S')) \cap \partial B(Q', d(Q',S')) \cap \partial B(R', d(R',S')).$$

In der Übungsstunde haben wir bereits gezeigt dass die Urbilder von Kreisen Kreise sind, und dass Kreise durch Isometrien bijektiv auf Kreise abgebildet werden.

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \exists!\, S \in E \text{ sodass}$$

$$\{S\} = \partial B(P, d(P,S')) \cap \partial B(Q, d(Q,S')) \cap \partial B(R, d(R,S'))$$

und es folgt $I(S) = S'$.

3. I^{-1} ist eine Isometrie

Seien $P, Q \in E$. Dann gilt

$$d(P,Q) \underset{\text{Def Inverse}}{=} d(I(I^{-1}(P)), I(I^{-1}(Q))) \overset{I \text{ Isometrie}}{=} d(I^{-1}(P), I^{-1}(Q))$$

$\square$