Musterlösung Serie 2

Aufgabe 1. G ist eine Menge mit n Elementen. Ist g_0 ein Element von G, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_{g_0} \colon G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g_0 \cdot g, \end{aligned}$$

welche die Elemente von G von links mit g_0 multipliziert, bijektiv, da in jeder Zeile der Gruppentafel, und insbesondere in der Zeile von g_0, jedes Element von G genau einmal vorkommt. Das heisst π_{g_0} ist eine Permutation der Elemente von G. Wir ordnen nun jedem Element von G die Permutation von G zu, die es durch Multipliaktion von links erzeugt; Definiere also

$$\begin{aligned} h \colon G &\longrightarrow S_n \\ g_0 &\longmapsto \pi_{g_0}. \end{aligned}$$

Die Abbildung h ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für $g_0, g_1 \in G$ gilt

$$h(g_0 \cdot g_1) = \pi_{g_0 \cdot g_1} = \pi_{g_0} \circ \pi_{g_1}.$$

Zusätzlich ist h injektiv: Gäbe es $g_0, g_1 \in G$ mit $g_0 \neq g_1$ aber $\pi_{g_0} = \pi_{g_1}$, dann würden die Zeilen von g_0 und g_1 in der Gruppentafel übereinstimmen. Dann hätte aber jede Spalte der Gruppentafel ein Element von G doppelt, was nicht der Fall ist.

Da h ein injektiver Gruppenhomomorphismus und $h(G)$ eine Untergruppe von S_n ist folgt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{h} \colon G &\longrightarrow h(G) \\ g &\longmapsto h(g) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von G auf eine Untergruppe von S_n definiert.

Aufgabe 2. (a) Seien $g_1, g_2 \in \ker \varphi$, das heisst $\varphi(g_1) = e$ und $\varphi(g_2) = e$. Da φ ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt dann auch

$$\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) * \varphi(g_2) = e * e = e,$$

und also dass $g_1 \cdot g_2 \in \ker \varphi$. Ebenso ist

$$\varphi(g_1^{-1}) = (\varphi(g_1))^{-1} = e^{-1} = e,$$

sodass $g_1^{-1} \in \ker \varphi$.

(b) Wir zeigen zuerst, dass aus $\ker\varphi \neq \{e'\}$ folgt, dass φ nicht injektiv ist, wobei e' das neutrale Element von G_1 ist. Da $\varphi(e') = e$ gilt, gilt dass $\{e'\} \subset \ker\varphi$. Falls also $\ker\varphi \neq \{e'\}$ heisst das, dass es ein $g \in G_1$ gibt mit $g \neq e'$ und $g \in \ker\varphi$. Schreiben wir das aus, erhalten wir dass es ein $g \in G_1$ gibt, mit $g \neq e$ und

$$\varphi(g) = e = \varphi(e'),$$

sodass φ nicht injektiv ist.

Ist nun $\ker\varphi = \{e'\}$ und $g_1, g_2 \in G_1$ sodass

$$\varphi(g_1) = \varphi(g_2).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \varphi(g_1) * (\varphi(g_2))^{-1} &= e \\ \Rightarrow \varphi(g_1) * \varphi(g_2^{-1}) &= e \\ \Rightarrow \varphi(g_1 \cdot g_2^{-1}) &= e. \end{aligned}$$

Nach Vorraussetzung bildet φ aber nur das neutrale Element e' auf e ab, sodass $g_1 \cdot g_2^{-1} = e'$ und also $g_1 = g_2$ folgt. Also ist φ injektiv.

Aufgabe 3. Seien s_1 und s_2 die Spiegelungen der Ebene durch die Geraden (p_1p_3) und (p_2p_4) und s_3 und s_4 die Spiegelungen an den Geraden welche durch 0 und den Mittelpunkt von p_1p_4, respektive durch 0 und den Mittelpunkt von p_1p_2 gehen. Seien r_1, r_2, und r_3 die Rotationen um 0 in positiver mathematischer Richtung (d.h., im Gegenuhrzeigersinn) mit Winkel $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, und $\frac{3\pi}{4}$, respektive. Dann besteht die Menge

$$G' := \{\mathrm{Id}, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

aus Isometrien von E, die das Quadrat Q mit Eckpunkten p_1, p_2, p_3 und p_4 in sich überführen. Also gilt $G' \subset G$.

Wir wollen nun zeigen, dass ausserdem $G \subset G'$ gilt. Aus Serie 1 wissen wir bereits, dass eine Isometrie der Ebene eindeutig durch die Bilder dreier nicht kolinearer Punkte bestimmt wird. Wir studieren also die möglichen Bilder einer Isometrie die Q in sich überführt der Punkte p_1, p_2 und p_3. Aus Serie 1 wissen wir ausserdem, dass eine solche Isometrie die Eckpunkte von Q bijektiv auf die Eckpunkte von Q abbildet. Daraus folgt, dass das Dreieck Δ mit Ecken p_1, p_2 und p_3 durch eine Isometrie I, welche Q auf Q abbildet, auf sich selbst, auf das Dreieck mit Ecken p_2, p_3 und p_4, auf das Dreieck mit Ecken p_3, p_4, und p_1 oder auf das Dreieck mit Ecken p_4, p_1 und p_2 abgebildet werden kann.

Im ersten Fall bildet I das Dreieck Δ auf sich selbst ab. Weil Δ gleichschenklig in p_2, aber nicht gleischseitig ist und I distanzerhaltend ist, bildet I den Punkt p_2 auf p_2 ab. Bildet I

ausserdem p_1 auf p_1 und p_3 auf p_3 ab, dann ist I eindeutig bestimmt; aber die Identität bildet p_1, p_2 und p_3 auf dieselben Punkte ab, also ist $I = \mathrm{Id} \in G'$. Bildet I ausserdem p_1 auf p_3 und p_3 auf p_1 ab, dann ist I eindeutig bestimmt; aber aber die Spiegelung s_2 an der Geraden (p_2p_4) bildet p_1, p_2 und p_3 auf dieselben Punkte ab, also ist $I = s_2 \in G'$.

Im zweiten Fall bildet I das Dreieck Δ auf das Dreieck mit Ecken p_2, p_3 und p_4 ab. Weil I distanzerhaltend ist bildet es p_2 auf p_3 ab. Bildet I ausserdem p_1 auf p_2 und p_3 auf p_4 ab, dann ist I eindeutig bestimmt; aber die Rotation r_1 um 0 mit Winkel $\frac{\pi}{4}$ bildet p_1, p_2 und p_3 auf dieselben Punkte ab, also ist $I = r_1 \in G'$. Bildet I ausserdem p_1 auf p_4 und p_3 auf p_2 ab, dann ist I eindeutig bestimmt; aber die Spiegelung s_3 an der Geraden durch 0 und den Mittelpunkt von p_1p_4 bildet p_1, p_2 und p_3 auf dieselben Punkte ab, also ist $I = s_3 \in G'$.

Mit analogen Argumenten findet man, dass auch in den übrigen Fällen, die Isometrie I in der Liste der Elemente von G' enthalten ist. Also gilt $G \subset G'$ und damit auch $G = G'$.

An der obigen Fallunterscheidung liest man die Permutationen der Eckpunktmenge $E = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, welche durch Einschränkung der Elemente von G auf E entstehen ab. Sind $c := (p_2p_3p_4p_1)$ und $t := (p_3p_2p_1p_4)$, dann ist die Untergruppe der Permutationen von E, die so entstehen gegeben durch

$$\{\mathrm{Id}, t, c, t \circ c, c^2, t \circ c^2, c^3, t \circ c^3\}.$$