Prof. Dr. M. Burger Herbstsemester 2014

Musterlösung Serie 3

Aufgabe 1. (a) Mit Satz II.1 aus der Vorlesung gilt $\mathcal{T}(E) \subset \mathrm{Is}(E)$ und weil $T_0 \in \mathcal{T}(E)$, ist $\mathcal{T}(E)$ nichtleer. $\mathcal{T}(E)$ is abgeschlossen unter Komposition, denn für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$(T_v \circ T_w)(p) = T_v(p + w) = p + v + w = T_{v+w}(p) \tag{1}$$

und also $T_v \circ T_w \in \mathcal{T}(E)$. Zusätzlich ist für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ das Inverse von T_v in $\mathrm{Is}(E)$ gegeben durch T_{-v}, denn mit 1 ist

$$T_v \circ T_{-v} = T_{v-v} = T_0 = \mathrm{Id} = T_{-v} \circ T_v.$$

Also ist $(T_v)^{-1} \in \mathcal{T}(E)$.

(b) Per Definition von $O(2, \mathbb{R})$ ist es Teilmenge von $\mathcal{T}(E)$ und weil $\mathrm{Id}(0) = 0$ ist $\mathrm{Id} \in O(2, \mathbb{R})$ und somit ist $O(2, \mathbb{R})$ nichtleer. $O(2, \mathbb{R})$ ist abgeschlossen unter Kompostition, denn für alle $g_1, g_2 \in O(2, \mathbb{R})$ gilt

$$(g_1 \circ g_2)(0) = g_1(g_2(0)) = g_1(0) = 0,$$

sodass $g_1 \circ g_2 \in O(2, \mathbb{R})$. Weiterhin gilt für jedes $g \in O(2, \mathbb{R})$, per Definition dass $g(0) = 0$ und weil g eine Isometrie und also bijektiv ist, folgt daraus dass $g^{-1}(0) = 0$. Also ist $g^{-1} \in O(2, \mathbb{R})$ und $O(2, \mathbb{R})$ abgeschlossen unter der Bildung von Inversen.

Aufgabe 2. Siehe Vorlesung im Beweis von Satz II.1.

Aufgabe 3. Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass es für jede orientierungsumkehrende Isometrie φ einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ und eine Gerade g in der Ebene gibt, sodass

$$\varphi = T_v \circ s_g.$$

Falls $v = 0$, dann ist φ eine Spiegelung an der Geraden g. Sei nun $v \neq 0$. Zerlege $v = v^{\parallel} + v^{\perp}$, sodass $v^{\parallel}$ parallel zu g und $v^{\perp}$ orthogonal zu g ist und betrachte die Isometrie

$$\psi := T_{v^{\parallel}} \circ s_{g+\frac{v}{2}}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\varphi = \psi$. Da mit Serie 1 eine Isometrie eindeutig durch die Bilder dreier nicht kolinearer Punkte bestimmt wird reicht es die Gleichheit für drei nicht-kolineare Punkte zu überprüfen.

Sei $p \in g$. Dann gilt

$$\varphi(p) = T_v(s_g(p)) = T_v(p) = v + p,$$

und

$$\psi(p) = T_{v^{\|}}(s_{g+\frac{v}{2}}(p)) = T_{v^{\|}}(p + v^{\perp}) = p + v^{\perp} + v^{\|} = v + p.$$

Also gilt für alle Punkte $p \in g$, dass $\varphi(p) = \psi(p)$. Insbesondere, stimmen φ und ψ auf zwei verschiedenen Punkten p_1 und p_2 von g überein.

Sei nun $q \in g + \frac{v}{2}$. Da $v \neq 0$ ist $g + \frac{v}{2}$ parallel zu g und nicht identisch mit g, sodass $q \neq g$ und also nicht kolinear mit p_1 und p_2 ist. Wir berechnen

$$\varphi(q) = T_v(s_g(q)) = T_v(q - v^{\perp}) = q - v^{\perp} + v = q + v^{\|}$$

und

$$\psi(q) = T_{v^{\|}}(s_{g+\frac{v}{2}}(q)) = T_{v^{\|}}(q) = q + v^{\|}.$$

Also ist $\varphi(q) = \psi(q)$.

Es folgt dass $\varphi = \psi$. Ist $v^{\|} = 0$, dann ist ψ eine Spiegelung an der Geraden $g + \frac{v}{2}$. Ist $v^{\|} \neq 0$, dann ist ψ eine Gleitspiegelung an der Geraden $g + \frac{v}{2}$ mit Verschiebungsvektor $v^{\|}$, wobei $v^{\|}$ per Definition parallel zu g und also auch parallel zu $g + \frac{v}{2}$ ist.