Musterlösung: Serie 5

Aufgabe 1. Für die Zeichnung siehe Extrablatt. Seien $P := (1, 1)$, $Q := (3, 1)$, $R := (3, -1)$, $S := (1, -1)$, $T := (1, 0)$ und P', Q', R', S' und T' ihre Bilder unter der Inversion am Einheitskreis K. Wir bemerken zuerst, dass T auf K liegt und deshalb $T' = T$ sein muss. Die Gerade (PS) geht nicht durch 0 und wird also auf einen Kreis K_1 abgebildet, der durch 0 geht. Weil i_K winkelerhalten ist und (PS) tangent an K in T ist wissen wissen wir über K_1 weiter, dass K_1 tangent an K ist, d.h., die selbe Tangente nähmlich (PS) hat. Es folgt, dass das Zentrum von K_1 auf der Orthogonalen zu (PS) in T liegt, und also auf der x-Achse liegt. Da das Zentrum von K_1 den selben Abstand von 0 und T hat, ist es der Punkt $(\frac{1}{2}, 0)$ und K_1 ist der Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, 0)$ und Radius $\frac{1}{2}$. Da P' auf der Geraden $(0P)$ liegt, ist P' der Schnittpunkt von K_1 mit $(0P)$. Genauso ist S' der Schnittpunkt von K_1 mit $(0S)$. Die Gerade (PQ) geht nicht durch 0 und wird also durch i_K auf einen Kreis K_1 abgebildet, der durch 0 geht. Weiter wissen wir über K_2, dass er durch P' geht und orthogonal zu K_1 in P' ist. Die Tangente an K_1 in P' ist die Parallele zur x-Achse durch P' und wir bemerken, dass der Punkt $(0, \frac{1}{2})$ auf ihr liegt und denselben Abstand zu 0 als auch zu P' hat. Es folgt, dass $(\frac{1}{2}, 0)$ das Zentrum von K_2 ist, sodass K_2 der Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, 0)$ und Radius $\frac{1}{2}$ ist. Wir finden Q' als Schnittpunkt von K_2 mit der Geraden $(0Q)$. Analog finden wir den Kreis auf welchen die Gerade (SR) abgebildet wird und den Punkt R'. Die Gerade (QR) enthält 0 nicht und wird also auf einen Kreis K_3 abgebildet, der 0 enthält. Weiterhin wissen wir, dass K_3 die Punkte Q' und R' enthält und können sein Zentrum als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Segmente $\overline{0Q'}$ und $\overline{Q'R'}$ konstruieren. Die Koordinaten von P' lassen sich wie folgt berechnen: Der Abstand von P zu 0 ist $\sqrt{2}$ und also ist

$$d(P', 0) \cdot \sqrt{2} = 1^2$$
$$d(P', 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Da P, P' und 0 auf einer Geraden liegen, folgt dass $P' = \frac{1}{2}P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Die Koordinaten von Q', S' und R' berechnen sich analog.

Aufgabe 2. Sei i'_K die Funktion aus der Aufgabenstellung und i_K die Inversion an K. Wir wollen nun zeigen, dass für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt, dass $i'_K(z) = i_K(z)$. Sei also $z := r_1 e^{i\phi}$ mit $r_1 \neq 0$. Dann liegt das Bild von z unter i_K auf der Geraden durch 0 und z und auf der selben Seite von 0 wie z. Das heisst $i_K(z)$ lässt sich schreiben als $i_K(z) := r_2 e^{i\phi}$ mit $r_2 \neq 0$. Zusätzlich wissen wir, dass $r_1 \cdot r_2 = r^2$ und also

$$r_2 = \frac{r^2}{r_1}.$$

Es folgt dass

$$i_K(z) = r_2 e^{i\phi} = \frac{r^2}{r_1} e^{i\phi} = \frac{r^2}{r_1 e^{-i\phi}} = \frac{r^2}{\overline{z}} = i'_K(z).$$

Aufgabe 3. Sei r der Radius von K.

Wir bemerken zuerst, dass für je zwei Punkte A und B in der euklidischen Ebene E, wobei beide verschieden sind von z das Dreick zAB ähnlich ist zum Dreieck $zA'B'$, wobei $A' := i_K(A)$ und $B' := i_K(B)$ und $\angle zAB = \angle zB'A'$. Das folgt daraus, dass, falls A und B Abstand r_1 und r_2 von z und A' und B' Abstand r_1' und r_2' von z haben, dann gilt

$$r_1 \cdot r_1' = r^2 = r_2 \cdot r_2',$$

und also verhält sich r_1' zu r_2' wie r_2 zu r_1. Da die Dreiecke zAB und $zA'B'$ denselben Winkel in z haben folgt daraus die Bemerkung.

Seien nun P, Q, R, und S vier Punkte auf C. Wir zeigen, dass ihre Bilder P', Q', R' und S' unter i_K wiederum auf einem Kreis liegen. Wir benutzen dafür, dass ein Viereck genau dann in einem Kreis eingeschrieben ist, wenn sich zwei genenüberliegenden Winkel zu π addieren. Die Winkel $\angle P'S'R'$ und $\angle R'Q'P'$ liegen in dem Viereck $P'Q'R'S'$ genenüber und wir berechnen

$$\begin{aligned}
\angle P'S'R' + \angle R'Q'P' &= \pi - \angle P'S'z + \pi - \angle zS'R' + \angle P'Q'z - \angle R'Q'z && (1)\\
&= 2\pi - (\angle P'S'z - \angle P'Q'z) - (\angle zS'R' + \angle R'Q'z) && (2)\\
&= 2\pi - (\angle SPz - \angle QPz) - (\angle zRS + \angle QRz) && (3)\\
&= 2\pi - \angle SPQ - \angle QRS && (4)\\
&= \pi, && (5)
\end{aligned}$$

wobei 3 aus unserer Bemerkung folgt und 5 folgt weil das Viereck $PQRS$ auf C liegt und sich damit seine zwei gegenüberliegenden Winkel $\angle SPQ$ und $\angle QRS$ zu π addieren. Da P, Q, R und S beliebige paarweise verschiedene Punkte auf C waren, folgt, dass C unter i_K auf einen Kreis C' abgebildet wird.

Wäre nun $z \in C'$, dann wird C' durch i_K auf eine Gerade abgebildet. Aber $i_K = i_K^{-1}$ und das Urbild von C' unter i_K enthält C. Aber Geraden enthalten keine Kreise, sodass $z \notin C'$ folgt.

Aufgabe 4. Betrachte zuerst den Fall, in welchem $p \notin K$ und $z \notin g$. Sei $p' := i_K(p)$ und w der Schnittpunkt der Geraden ℓ welche Senkrecht zu g durch p geht mit der Mittelsenkrechten von $\overline{pp'}$. Da $p \notin K$ ist $p' \neq p$ und die Mittelsenkrechte ist wohldefiniert, und weil $z \notin g$, sind ℓ und die Mittelsenkrechte von $\overline{pp'}$ nicht parallel und also w wohldefiniert. Sei C der Kreis mit Mittelpunkt w und Radius $|\overline{wp}|$. Dann ist nach Konstruktion $p' \in C$ und C tangent an g in p. Der Punkt p ist entweder innerhalb von K oder ausserhalb. Ist p innerhalb von K, dann ist sein Bild p' ausserhalb, und umgekehrt. Also schneidet C den Kreis K in zwei verschiedenen Punkten q_1 und q_2. Laut Vorlesung existiert nun ein eindeutiger Kreis C' der orthogonal zu K ist und durch p und q_1 geht. Aber da $C' \perp K$, folgt dass $i_K(p) = p' \in C'$. Also liegen p, q_1 und p' sowohl auf C als auch auf C'. Es folgt dass $C = C'$. Also ist C orthogonal zu K.

Falls $z \in g$, dann ist $C = g$ der eindeutige v-Kreis der orthogonal zu K und tangent in p an g ist. Falls $p \in K$, dann ist $C = p$ degeneriert.