Musterlösung Serie 6

Aufgabe 1. Sei $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Falls für alle $i \in \{1,2,3,4\}$ gilt, dass $z_i \neq \infty$ und $z_i \neq -\frac{d}{c}$, dann

$$\begin{aligned}
L_g(z_i) - L_g(z_j) &= \frac{az_i + b}{cz_i + d} - \frac{az_j + b}{cz_j + d} \\
&= \frac{(az_i + b)(cz_j + d) - (az_j + b)(cz_i + d)}{(cz_i + d)(cz_j + d)} \\
&= \frac{acz_iz_j + adz_i + bcz_j + bd - acz_iz_j - adz_j - bcz_i - bd}{(cz_i + d)(cz_j + d)} \\
&= \frac{(z_i - z_j)\det g}{(cz_i + d)(cz_j + d)}.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die Nenner und Zähler von

$$D(L_g(z_1), L_g(z_2), L_g(z_3), L_g(z_4)) = \frac{L_g(z_1) - L_g(z_3)}{L_g(z_2) - L_g(z_3)} \cdot \frac{L_g(z_2) - L_g(z_4)}{L_g(z_1) - L_g(z_4)}$$

und Kürzen von $\det g$, sowie der Faktoren der Form $(cz_i - d)$ erhält man die Behauptung. Die Fälle in denen $z_i = \infty$ oder $z_i = -\frac{d}{c}$ für ein $i \in \{1,2,3,4\}$ überprüft man separat.

Aufgabe 2. (a) (Das Inszidenzaxion I_1 ist in der hyperbolsichen Ebene erfüllt) Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sind A und B auf einer euklidischen Geraden g mit O, dann ist g ein v-Kreis orthogonal zum Einheitskreis K, der A und B enthält und also eine hyperbolische Gerade durch A und B. Sei in diesem Fall C ein weiterer v-Kreis, der A und B enthält und mit $C \perp K$. Ist C eine euklidische Gerade, dann ist $C = g$, denn eine euklidische Gerade wird durch Angabe zweier disjunkter Punkte auf ihr eindeutig bestimmt. Ist C ein euklidischer Kreis, dann liegt sein Zentrum z auf der euklidischen Mittelsenkrechten M_{AB} des euklidischen Segments $\overline{AB}$. Weiterhin ist $A' : i_K(A) \in C$, denn $C \perp K$, und das Zentrum z von C liegt auch auf der euklidischen Mittelsenkrechten $M_{AA'}$ des euklidischen Segments $\overline{AA'}$. Da aber A und B auf derselben euklidischen Geraden g liegen und per Definition von i_K der Punkt $A' = i_K(A)$ ebenfalls auf g liegt, sind die Mittelsenkrechten M_{AB} und $M_{AA'}$ euklidisch parallel. Also schneiden sie sich nicht und ein solcher v-Kreis wie C existiert nicht.

Sind A und B nicht auf derselben euklidischen Geraden durch 0, dann sind die euklidischen Mittelsenkrechten M_{AB} und $M_{AA'}$ der euklidischen Segmente $\overline{AB}$ und $\overline{AA'}$, respektive, und wobei $A' := i_K(A)$, nicht euklidisch parallel und schneiden sich in genau einem Punkt z. Sei C der Kreis mit Zentrum z der durch A geht. C ist dadurch eindeutig bestimmt. Per Konstruktion ist $B \in C$. Da A innerhalb des Einheitskreises K liegt und $A \notin K$, liegt A' ausserhalb von K und C schneidet K, d.h., $K \cap C \neq \emptyset$. Sei also $q \in K \cap C$. Dann existiert laut Vorlesung ein Kreis C' durch A und q mit $C' \perp K$. Aus $C' \perp K$ folgt aber, dass $i_K(A) = A' \in C'$. Also enthalten C und C' die paarweise verschiedenen Punkte A, q und A'. Es folgt, dass $C = C'$, sodass $C \perp K$

(b) (Das Axiom von Pasch B_4 ist in der hyperbolischen Ebene erfüllt)

Sei K der Einheitskreis der euklidischen Ebene E. Seien A, B, und C drei hyperbolisch nicht kolineare Punkte in $\mathcal{H} \subset E$. Sei (AB) die hyperbolische Gerade durch A und B, h eine hyperbolische Gerade mit $\{A, B, C\} \cap h = \emptyset$ und so, dass das hyperbolische Segment $\overline{AB}$ die Gerade h schneidet: $\overline{AB} \cap h \neq \emptyset$. Seien C_{AB} und C_h die euklidischen v-Kreise, die (AB), respektive h enthalten. Sei $p \in \overline{AB} \cap h$. Da $C_h \perp K$, $C_{AB} \perp K$ und $p \in C_h \cap C_{AB}$ folgt, dass $p' := i_K(p) \in C_h \cap C_{AB}$. Da p strikt innerhalb von K liegt, liegt p' per Definition von i_K strikt ausserhalb von K, sodass $p \neq p'$. Also schneiden sich C_{AB} und C_h in mindestens zwei verschiedenen Punkten. Wir unterscheiden vier Fälle.

Falls C_h und C_{AB} euklidische Kreise sind, dann ist entweder $C_h = C_{AB}$, was $A, B \notin C_h$ wiederspricht, oder $C_h \cap C_{AB} = \{p, p'\}$. Im letzteren Fall ist C_{AB} die Vereinigung von zwei Kreissegmenten C_{AB}^1 und C_{AB}^2, die von p und p' berandet werden und so dass C_{AB}^1 innerhalb von C_h liegt und C_{AB}^2 ausserhalb von C_h liegt. Nun liegen A und B nicht beide in C_{AB}^1 und nicht beide in C_{AB}^2, denn sonst wäre auf C_{AB}^1 oder auf C_{AB}^2 entweder A zwischen B und p, oder B zwischen A und p, was $p \in \overline{AB}$ wiederspricht. (Letzete Behauptung sieht man ein, in dem man zum Beispiel C_{AB} durch $z + re^{i\phi}$ parametrisiert, wobei z sein Zentrum, r sein Radius ist und $\phi \in [0, 2\pi)$ variert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man dann $p = z + re^{i0}$ und $p' = z + re^{i\phi'}$ mit $\phi' \in (0, 2\pi)$ annehmen. Dann sind C_{AB}^1 und C_{AB}^2 parametrisiert durch $\phi \in [0, \phi']$ und $\phi \in [\phi', 2\pi]$. Sind $A = z + re^{i\phi_A}$ und $B = z + re^{i\phi_B}$ und beispielsweise A und B beide in C_h^1, dann sind $\phi_A, \phi_B \in [0, \phi']$. Ist $\phi_A < \phi_B$, dann ist A zwischen B und p, und ist $\phi_A > \phi_B$, dann ist B zwischen A und p.) Also liegt A innerhalb von C_h und B ausserhalb von C_h, oder umgekehrt. Sei o.B.d.A, A innerhalb von C_h. Da $C \notin h = \mathcal{H} \cap C_h$ und $C \in \mathcal{H}$, ist $C \notin C_h$. Also ist C entweder innerhalb von C_h oder ausserhalb von C_h. Ist C innerhalb von C_h, dann muss jeder stetige Weg von C nach B den Kreis C_h schneiden, und insbesondere schneidet das hyperbolische Segment $\overline{BC}$ den Kreis C_h. Da $\overline{BC} \subset \mathcal{H}$ ist dieser Schnittpunkt enthalten in $\mathcal{H} \cap C_h = h$. Schneidet C_h zusätzlich das hyperbolische Segment $\overline{AC}$, dann schneidet es es entweder in einem, oder in mindestens zwei Punkten. Im ersten Fall haben C_h und $\overline{AC}$ eine gemeinsame Tangente und sind nach Serie 5, Aufgabe 4 identisch, was $A, C \notin h$

wiederspricht. Im zweiten Fall sind es zwei hyperbolische Geraden die zwei verschiedene Punkte gemein haben und also sind h und (AC) identisch, was wiederum nicht möglich ist. Also schneidet h das Segemet $\overline{BC}$, aber nicht das Segment $\overline{AC}$. Falls C ausserhalb von C_h folgt analog, dass h das Segement $\overline{AC}$, aber nicht das Segment $\overline{BC}$ schneidet.

In den Fällen, in denen entweder C_h oder C_{AB}, oder beide, euklidische Geraden sind kann man analog argumentieren. Gegebenenfalls wird in der Argumentation die Unterscheidung zwischen innerhalb und ausserhalb von einem Kreis durch die Unterscheidung zwischen dem Enthalten sein in verschiedenen Halbebenen, in die die euklidische Ebene durch eine Gerade geteilt wird ersetzt.

Aufgabe 3. Das Inszidenzaxiom I_1 ist erfüllt; für je zwei Punkte in P findet man eine Gerade in $\mathfrak{g}$ die sie entält und keine weitere. Jede Gerade in $\mathfrak{g}$ ist durch zwei verschiedene Elemente aus P definiert, also gilt I_2. Da jede Gerade aus $\mathfrak{g}$ genau zwei Elemente enthält und P mehr als drei Elemente enthält, gibt es drei Elemente in P, die nicht auf einer Geraden aus $\mathfrak{g}$ liegen, und also gilt I_3. Dagegen ist das Parallelenaxion nicht erfüllt, denn für den Punkt A und die Gerade $\{B, C\}$, die A nicht enthält, existieren die zwei Geraden $\{A, D\}$ und $\{A, E\}$, die A enthalten, aber $\{B, C\}$ nicht schneiden.