Lineare Algebra

D-MATH, HS 2014

Prof. Richard Pink

Lösung zu Serie 10

1. [**Aufgabe**]

a) Sei V' ein Unterraum eines K-Vektorraums V. Zeige, dass jede Linearform auf V' eine Fortsetzung zu einer Linearform auf V besitzt.

b) Sei $V = V_1 \oplus V_2$. Konstruiere und beweise einen Isomorphismus

$$V^* \cong V_1^* \oplus V_2^*.$$

1. [**Lösung**]

a) Sei $\alpha : V' \longrightarrow K$ eine beliebige Linearform. Zu dem Unteraum V' wähle ein Komplement V'' in V und definiere die Abbildung $\widetilde{\alpha} : V \longrightarrow K$ durch

$$\widetilde{\alpha}(v) := \alpha(v)$$

für jedes $v = v' + v''$ mit $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Wegen $V = V' \oplus V''$, ist $\widetilde{\alpha}$ wohldefiniert. Man zeigt nun direkt, dass α auch linear, also $\widetilde{\alpha} \in V^*$ ist. Wegen $\widetilde{\alpha}_{|V'} = \alpha$ ist die Behauptung bewiesen.

b) Definiere die Abbildung

$$\phi : V_1^* \oplus V_2^* \longrightarrow V^*$$

wie folgt: Für ein beliebiges Element $(\alpha_1, \alpha_2) \in V_1^* \oplus V_2^*$ sei

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2) : V \longrightarrow K$$

diejenige Abbildung, für die

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2)(v) = \alpha_1(v_1) + \alpha_2(v_2)$$

für alle $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gilt. Man zeigt direkt, dass $\phi(\alpha_1, \alpha_2)$ linear ist; die Abbildung ϕ ist also wohldefiniert. Weiter zeigt man direkt, dass auch ϕ linear ist.

Definiere die Abbildung

$$\psi : V^* \longrightarrow V_1^* \oplus V_2^*$$

durch

$$\psi(\alpha) = \big(\alpha_{|V_1}, \alpha_{|V_2}\big)$$

für alle $(\alpha : V \longrightarrow K) \in V^*$. Man zeigt, dass die Abbildung ψ wohldefiniert und linear ist.

Behauptung: $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{V^*}$ und $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{V_1^* \oplus V_2^*}$.

Beweis. Sei $\iota_i \colon V_i \longrightarrow V$ die Inklusion für $i = 1, 2$. Wegen

$$\psi_i(\phi(\alpha))(v_i) = \phi(\alpha_1, \alpha_2)(\iota_i(v_i)) = \alpha_i(v_i)$$

für alle $v \in V_i$, folgt $\psi_i(\phi(\alpha)) = \alpha_i$ und damit dann auch $\psi(\phi(\alpha)) = \alpha$. Die Aussage $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{V^*}$ folgt analog. $\square$

2. [**Aufgabe**] Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $B' = (w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von W. Sei $B'^* = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$ die zu B' duale Basis von W^*. Zeige: Für jede lineare Abbildung $f \colon V \to W$ gilt

$$M_{B',B}(f) = \big(\ell_i(f(v_j))\big)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}.$$

2. [**Lösung**] Die Darstellungsmatrix $A := (a_{ij})_{ij} := M_{B',B}(f)$ von f bezüglich B und B' ist definiert durch das kommutative Diagram

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "L_A"] \arrow[d, "\Phi_B"] & K^n \arrow[d, "\Phi_{B'}"] \\ V \arrow[r, "f"] & W, \end{tikzcd}$$

wobei $\Phi_B, \Phi_{B'}$ die von den geordneten Basen B bzw. B' induzierten Abbildungen sind. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von K^n und sei $e'_1, \ldots, e'_m$ die Standardbasis von K^m. Für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$f(v_i) = f(\Phi_B(e_i)) = \Phi_{B'}(L_A(e_i)) = \Phi_{B'}(\sum_j a_{ij} e'_j) = \sum_j a_{ij} w_j$$

und damit für alle $k = 1, \ldots, m$ auch

$$\ell_k(f(v_i)) = \sum_j a_{ij} \ell_k(w_j) = a_{ik}\,.$$

$*$ **3.** [**Aufgabe**] Zeige: Für jeden unendlich-dimensionalen Vektorraum V gilt $\dim V^* > \dim V$ im Sinne unendlicher Kardinalzahlen.

3. [**Lösung**] Für einen Beweis der Aussage siehe zum Beispiel:

(1) Reinhold Baer, Linear Algebra and Projective Geometry, Academic Press, 1952.

(2) Nathan Jacobson, Lectures in Abstract Algebra, Volume II: Linear Algebra, D. Van Nostrand Company Inc., 1953.

Alternativ siehe auch die pdf-Dateien unter den folgenden Links:

(3) `http://planetmath.org/sites/default/files/texpdf/38701.pdf`

(4) `http://www.science.oregonstate.edu/~parks/sample338.pdf`.

4. [**Aufgabe**] Für $i = 1, \ldots, n-1$ sei $\sigma_i \in S_n$ die Permutation, die i und $i+1$ vertauscht und alle übrigen Elemente von $\{1, \ldots, n\}$ festlässt, genannt *Nachbartransposition*. Zeige, dass jedes Element von S_n ein Produkt von Nachbartranspositionen ist.

4. [**Lösung**] Wir verwenden Induktion über n. Da $S_1 = \{\mathrm{id}_{S_1}\}$ und id_{S_1} gleich dem leeren Produkt ist, gilt die Aussage für $n = 1$. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geq 1$ und sei

$$\sigma : \{1, \ldots, n+1\} \longrightarrow \{1, \ldots, n+1\}$$

eine beliebige Permutation vom Grad $n+1$. Sei $i = \sigma(n+1)$ und definiere die Permutation

$$\tau := \sigma_{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_i \circ \sigma\,.$$

Dann gilt $\tau(n+1) = n+1$ und τ induziert eine Permutation

$$\tau_0 : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}.$$

Aus der Induktionsvorraussetzung folgt, dass τ_0 das Produkt von Nachbartranspositionen ist. Daraus folgt, dass dies auch für τ und damit auch für

$$\sigma = \sigma_i^{-1} \circ \cdots \circ \sigma_{n-1}^{-1} \circ \tau = \sigma_i \circ \cdots \sigma_{n-1} \circ \tau$$

gilt.

5. [**Aufgabe**] Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a) $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{pmatrix}$.

5. [**Lösung**] Durch Anwenden des Gaussverfahrens erhält man

$$\begin{aligned} \det(A) &= -4 \\ \det(B) &= 0 \\ \det(C) &= 24. \end{aligned}$$

Alternativ kann man in b) direkt erkennen, dass die erste Spalte der Matrix B eine Linearkombination der dritten und fünften Spalte ist. Die Matrix B ist daher nicht invertierbar, also $\det(B) = 0$.

6. [**Aufgabe**] Berechne in Abhängigkeit von a, b, c, d, e die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$$

6. [**Lösung**] Durch Subtrahieren der letzten Zeile von allen anderen Zeilen in der gegeben Matrix erhält man

$$A' := \begin{pmatrix} 0 & a-b & a-c & a-d & a-e \\ 0 & 0 & b-c & b-d & b-e \\ 0 & 0 & 0 & c-d & c-e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-e \\ a & b & c & d & e\,. \end{pmatrix}$$

Durch einmaliges zyklisches Permutieren der Zeilen, das heisst, durch Verschieben der untersten Zeile an die oberste Stelle, entsteht eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Diagonaleinträge ist. Da die Permutation gerade ist, erhalten wir die Antwort

$$\det \begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} = \det(A') = a(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)\,.$$

7. [**Aufgabe**] Seien a und b Elemente eines Körpers K und für $n \geq 1$ sei A_n die $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

Beweise:

$$\det(A_n) = (b-a)^{n-1}\big(b + (n-1)a\big).$$

7. [**Lösung**] Sei B_n die $n \times n$ Matrix

$$B_n := \begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

Behauptung. $\det(B_n) = (b-a)^{n-1}a$.

Beweis. Wir verwenden Induktion. Wegen $B_1 = (a)$ gilt die Aussage für $n = 1$. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geq 1$. Durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Zeile von B_{n+1} erhält man die Matrix

$$B'_{n+1} := \begin{pmatrix} 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

und durch Entwickeln von B'_{n+1} nach der ersten Zeile erhält man

$$\det(B_{n+1}) = \det(B'_{n+1}) = (b-a)\det(B_n) \overset{\text{IV}}{=} (b-a)^n a\,.$$

□

Behauptung. $\det(A_n) = (b-a)^{n-1}\big(b + (n-1)a\big)a$.

Beweis. Wir verwenden Induktion über n. Wegen $A_1 = (b)$ gilt die Aussage für $n = 1$. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geq 1$. Durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Zeile von A_{n+1} erhält man die Matrix

$$A'_{n+1} := \begin{pmatrix} b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

und durch Entwickeln von A'_{n+1} nach der ersten Zeile erhält man

$$\begin{aligned} \det(A_{n+1}) &= (b-a)\det(A_n) + (-1)(a-b)\det(B_n) \\ &\overset{\text{IV}}{=} (b-a)^n\big(b + (n-1)a\big)a + (b-a)^n a \\ &= (b-a)^n(b + na). \end{aligned}$$

Die Aussage gilt also auch für den Fall $n + 1$. □

Alternativ kann man wie folgt vorgehen: Durch Addieren der ersten $n-1$ Spalten zur letzten Spalte, erhält man eine Matrix die in der letzten Zeile den Eintrag $(b + (n-1)a) \cdot (1, \dots, 1)^T$ hat. Durch Herausziehen des Faktors $(b + (n-1)a)$ und Subtrahieren des a-fachen der letzten Spalte von allen anderen Spalten erhält man eine obere Dreiecksmatrix mit Einträgen auf den Diagonalen $b-a, \dots, b-a, 1$. Es folgt

$$\det(A_n) = (b+(n-1)a)\det\begin{pmatrix} b-a & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & b-a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b-a & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (b+(n-1)a)(b-a)^{n-1}\,.$$

8. [**Aufgabe**] Die Zahlen 2014, 1484, 3710 und 6996 sind alle durch 106 teilbar. Zeige ohne zu rechnen, dass auch

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

durch 106 teilbar ist.

8. [**Lösung**] Wir addieren $(1000\times(1.\text{ Spalte}) + 100\times(2.\text{ Spalte}) + 10\times(3.\text{ Spalte}))$ zur 4. Spalte. Wir ändern die Determinante dadurch nicht und erhalten:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2014 \\ 1 & 4 & 8 & 1484 \\ 3 & 7 & 1 & 3710 \\ 6 & 9 & 9 & 6996 \end{pmatrix}.$$

Da jeder Eintrag in der letzten Spalte durch 106 teilbar ist, gilt

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2014 \\ 1 & 4 & 8 & 1484 \\ 3 & 7 & 1 & 3710 \\ 6 & 9 & 9 & 6996 \end{pmatrix} = 106 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & a_1 \\ 1 & 4 & 8 & a_2 \\ 3 & 7 & 1 & a_3 \\ 6 & 9 & 9 & a_4 \end{pmatrix}$$

mit ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_4$. Da die Determinante einer Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$ wieder in $\mathbb{Z}$ liegt, folgt die Aussage.