Aufgabe: Berechne das bestimmte Integral

$$I = \int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx$$

Lösung: Da der Nenner schon faktorisiert ist, können wir die Nullstellen direkt ablesen: $x = 0$ ist eine doppelte Nullstelle und $x = 1$ ist eine einfache Nullstelle. Dies heisst auch, dass das Integral unproblematisch ist, da der Integrand zwischen $x = 2$ und $x = 3$ wohl-definiert ist. Wir machen nun folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

und daraus folgt durch gleichnahmig machen

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{x^2(A+C) + x(-A+B) - B}{x^2(x-1)}$$

Wir erhalten durch Koeffizientenvergleich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
0 &= A + C && \text{(Vergleich der Koeffizienten von } x^2\text{)} \\
0 &= -A + B && \text{(Vergleich der Koeffizienten von } x\text{)} \\
1 &= -B && \text{(Vergleich der konstanten Koeffizienten)}
\end{aligned}$$

mit der Lösung $A = -1, B = -1, C = 1$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^3 \tfrac{1}{x^2(x-1)}\,dx \\
&= \int_2^3 \tfrac{-1}{x} + \tfrac{-1}{x^2} + \tfrac{1}{x-1}\,dx \\
&= \big[-\ln|x| + \tfrac{1}{x} + \ln|x-1|\big]_2^3 \\
&= -\ln 3 + \tfrac{1}{3} + \ln 2 - \big(-\ln 2 + \tfrac{1}{2} + \ln 1\big) \\
&= -\ln 3 + 2\ln 2 - \tfrac{1}{6}
\end{aligned}$$

und damit ist die Aufgabe gelöst.