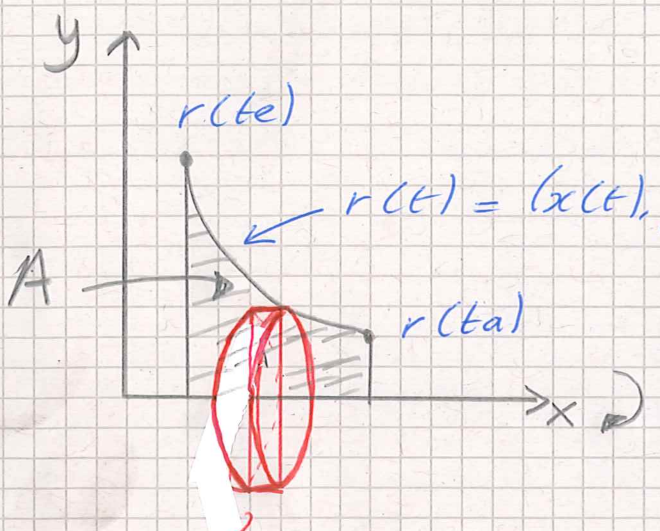


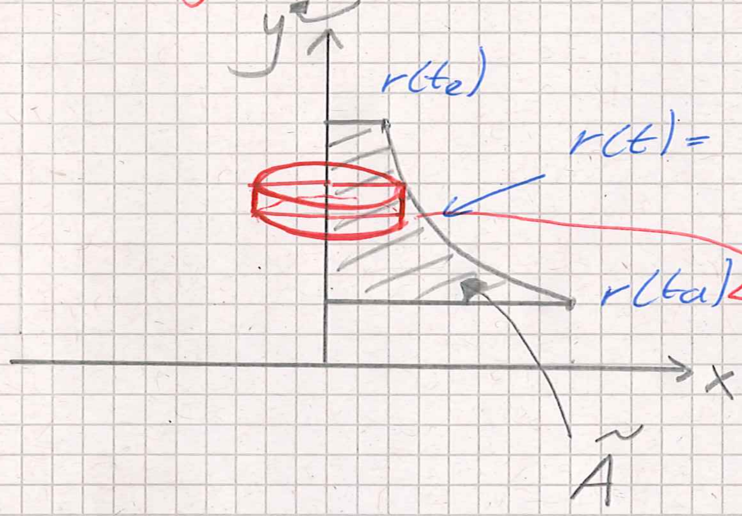
Rotiere die Fläche A um die x-Achse

Das Volumen des so entstehenden Körpers ist.

$$V_x = -\pi \int_{t_a}^{t_e} y(t)^2 \cdot x'(t)\, dt$$

weil $x'(t)$ in diesem Fall negativ ist.

Volumen $= \pi \cdot y(t_i)^2 \cdot (x(t_i + \Delta t) - x(t_i))$



$r(t) = (x(t), y(t))$ wie oben

Volumen $= \pi \cdot x(t_i)^2 (y(t_i + \Delta t) - y(t_i))$

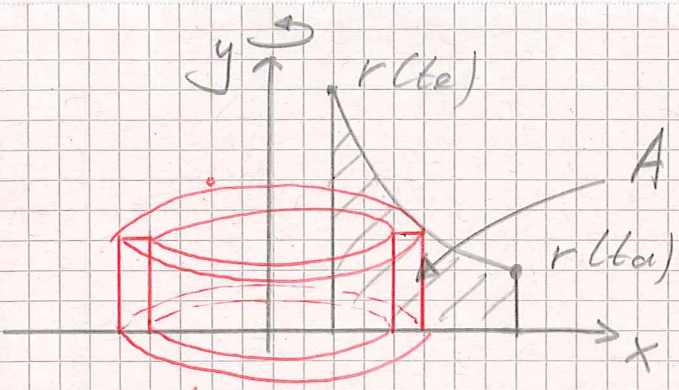
Rotiere nun die Fläche Ã um die y-Achse; das Volumen des so entstehenden Körpers ist

$$V_y = \pi \int_{t_a}^{t_e} x(t)^2 \underbrace{y'(t)}_{\text{in diesem Beispiel } \geq 0} dt$$

Was passiert nun aber wenn wir die Fläche A um die y-Achse rotieren.

Hier zwei verschiedene Herleitungen:

①

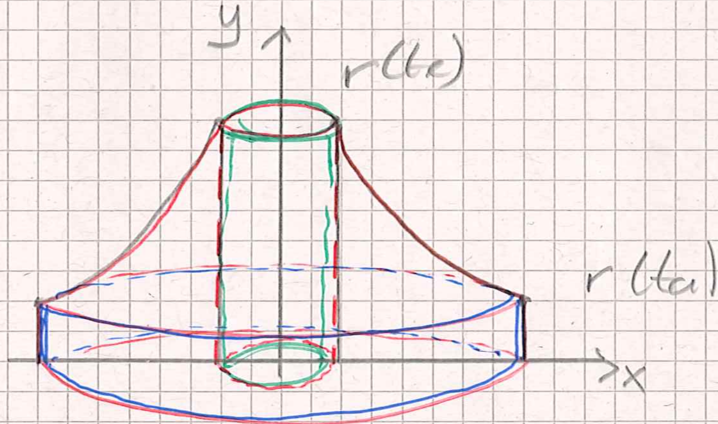


↳ Volumen $\approx 2\pi r \cdot \Delta x \cdot h$

$$= 2\pi \cdot x(t_i) \cdot \underbrace{\left(x(t_i+\Delta t) - x(t_i)\right)}_{\leq 0} \cdot y(t_i)$$

$$\Longrightarrow \quad V_{①} = -2\pi \int_{t_a}^{t_e} x(t) \cdot y(t) \cdot x'(t)\, dt$$

②



Der gesuchte Körper kann man auch wie folgt betrachten

$$V_{②} = V_y + \text{Zylinder}_{\text{blau}} - \text{Zylinder}_{\text{grün}}$$

$$= \pi \int_{t_a}^{t_e} x(t)^2\, y'(t)\, dt + \pi\, x(t_a)^2 \cdot y(t_a) - \pi \cdot x(t_e)^2 \cdot y(t_e)$$

Das $V_{①} = V_{②}$ lässt sich verifizieren mit Hilfe der part. Integration

$$V_{①} = -2\pi \int_{ta}^{te} \underbrace{x(t) \cdot x'(t)}_{f'} \cdot \underbrace{y(t)}_{g} \, dt$$

$$= -2\pi \left[\frac{1}{2} x(t)^2 y(t) \right]_{ta}^{te} + 2\pi \int_{ta}^{te} \frac{1}{2} x(t)^2 y'(t) \, dt$$

$$= \pi x(ta)^2 y(ta) - \pi x(te)^2 y(te)$$

$$+ \pi \int_{ta}^{te} x(t)^2 y'(t) \qquad = \quad V_{②}$$

q.e.d.