

# Basisprüfung – Lineare Algebra

## Inoffizielle Lösung

**Autor**

Adrian Nievergelt

Herbst 2006

---

### Aufgabe 1

a) Die LR-Zerlegung lässt sich am besten mit dem Algorithmus von Gauss durchführen. Dafür notieren wir die einzelnen Schritte bei der Berechnung der Rechtsmatrix  $R$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{II} - \frac{1}{2}\text{I} \\ \text{III} - \frac{1}{2}\text{I}}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1/2 & -3 \\ 0 & \alpha - 1/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + 2(\alpha - \frac{1}{2})\text{II}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1/2 & -3 \\ 0 & 0 & -6\alpha + 3 \end{pmatrix}$$

Um nun die zugehörige Linksmatrix zu erhalten müssen wir die Schritte die bisher gemacht wurden umkehren. Ich beginne mit einer Einheitsmatrix und fülle die untere Hälfte. Beispielsweise ergibt ein  $\text{II} - \frac{1}{2}\text{I}$  ein  $-1 \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  in der Zeile 2 und der Spalte 1.

Die Linksmatrix  $L$  ist schnell geschrieben als:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -2\alpha + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da wir keine Zeilenvertauschungen vornehmen mussten ist die Pivotmatrix  $P$  gleich der Einheitsmatrix und es gilt

$$LR = PA, \quad P = \text{I}$$

b) Wenn man das gefundene LR aus Teilaufgabe a) in das Gleichungssystem einsetzt erhält man

$$LRx = 0$$

## Aufgabe 2

---

und da  $L$  in jedem Fall vollen Rang hat ist sie auch immer invertierbar. Multiplikation des Gleichungssystems mit  $L^{-1}$  ergibt

$$L^{-1}LRx = Rx = L^{-1}0 = 0 \implies Rx = 0$$

Es gibt zwei Fälle zu unterscheiden: Falls  $\alpha \neq \frac{1}{2}$  ist das System nur trivial lösbar und der Lösungsraum ist 0.

Für den Fall, dass  $\alpha = \frac{1}{2}$  enthält  $R$  eine Nullzeile und  $x_3$  ist frei wählbar. Man wählt  $x_3 = 1$  und setzt Rückwärts ein um den Vektor  $\vec{v}$  zu erhalten der den Lösungsraum aufspannt.

$$\vec{v} = (2, -6, 1)^T$$

---

## Aufgabe 2

a) Da wir in der Funktion

$$f(x) = a \cos(x) + b$$

die Parameter  $a$  und  $b$  bestimmen sollen macht es Sinn als Basis für den Vektorraum eine Linearkombination von  $\cos(x)$  und 1 zu verwenden.

Es gilt also eine Gleichung der Form

$$\begin{pmatrix} \cos x_1 & 1 \\ \cos x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

oder formal geschrieben

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

zu lösen. Da dieses Gleichungssystem überbestimmt ist, wird nach Gauss der Fehler minimal wenn man die Gleichung als

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{y}$$

löst. Ich berechne zuerst  $A^T A$ :

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und danach  $A^T y$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.39 \\ 2.79 \\ -.61 \\ 2.43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ergibt den Lösungsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

und damit die minimierte Funktion

$$f(x) = 3 \cos(x) + 2.5$$

**b)** Die erste Methode ist die oben beschriebene Variante der Multiplikation mit der Transponierten Matrix. In Matlab

```
linsolve(transp(A)*A, transp(A)*c)
```

Weiterhin lassen sich Matlabs eingebaute Fitting-Funktionen verwenden.

```
regress(c,A)
```

---

## Aufgabe 3

Für den Kern wird mittels Gauss-Algorithmus die Matrix auf reduzierte Form gebracht.

**Bemerkung 1 (Notation):** Seien  $v_1, v_2, \dots, v_n$  Vektoren. Der Raum  $w$  der Linearkombination dieser wird geschrieben als

$$w = \mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

#### Aufgabe 4

---

Man erhält

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a & 0 \end{pmatrix}$$

und kann daraus einfach den Kernvektor ablesen, muss jedoch zwei Fälle unterscheiden. Falls  $a \neq 0$  erhält man für einen frei gewählten Parameter  $x_5 = 1$  und einsetzen

$$\text{Kern}(A) = \mathcal{L} \left\{ (-4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T \right\}$$

Für den Fall, dass  $a = 0$  erhält man eine weitere Nullzeile und darf daher auch  $x_4$  frei wählen. Daher erhält man für  $x_5 = 0$  und  $x_4 = 1$  einen weiteren Basisvektor zum ersten, nämlich

$$\text{Kern}(A) = \mathcal{L} \left\{ (-4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T, (-2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T \right\}$$

Für das Bild verfährt man ähnlich, nur dass man hier die Matrix um eine Zeile erweitert.

Auch hier unterscheidet man wieder. Ist  $a \neq 0$  spannt die Matrix den vollen  $\mathbb{R}^4$  auf, was man daran sieht, dass die reduzierte Matrix dann keine Leerzeilen hat.

Für den Fall dass die Matrix nicht den vollen Bildraum aufspannt, hier falls  $a = 0$  kann man mit folgendem Verfahren eine Basis finden.

1. Man transponiert die gegebene Matrix.
2. Auf die transponierte Matrix wird der Gauss-Algorithmus angewandt.
3. Diejenigen Zeilen der so erhaltenen Matrix sind Basisvektoren des Bildraums.

In unserem Fall setze ich  $a = 0$  und wende den Algorithmus an. Man sieht im Ergebnis

$$(A^T)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Bild}(A) = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

## Aufgabe 4

a) Für eine orthonormale Basis gelten zwei Bedingungen:

1. Die Basisvektoren sind normalisiert:

$$|\vec{e}_i| = 1$$

2. Alle Basisvektoren sind zueinander Orthogonal:

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j$$

Aus der Bedingung dass  $v_1$  den gleichen Raum aufspannen muss wie  $e_1$  lässt sich folgern, dass

$$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dieser Schritt ist auch der erste des Gram-Schmidt-Verfahrens, das das Standardverfahren für Orthonormalisierung darstellt. Der zweite Vektor wird durch

$$e'_2 = v_2 - \underbrace{\langle v_2, e_1 \rangle \cdot e_1}_{\substack{\text{Anteil von } v_2 \\ \text{in Richtung } e_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

orthogonalisiert. Der Fakt, dass

$$\langle v_2, e_1 \rangle = 0$$

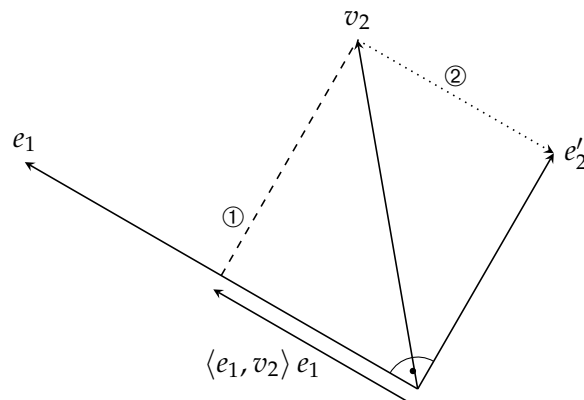
sagt uns, dass  $v_1$  und  $v_2$  bereits orthogonal sind, daher bleibt nur  $v_2$  zu normieren:

$$e_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Als nächstes wird der dritte Basisvektor orthogonalisiert mit

$$e'_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle \cdot e_2$$

wobei auch hier wieder die Terme mit Skalarprodukte die Anteile von  $v_3$  in Richtung der jeweiligen Basisvektoren angeben, die von  $v_3$  abgezogen werden müssen, damit dieser orthogonal zu den anderen Vektoren wird.



**Abbildung 1:** Illustration zum Gram-Schmidt Verfahren

Rechnerisch heisst dies

$$e'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

was als letzter Schritt noch normiert werden muss zu

$$e_3 = \frac{e'_3}{|e'_3|} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

**b)** Für die 2-Norm können wir es uns zu Nutze machen dass  $H$  immer Orthogonal ist, also dass

$$HH^T = \mathbb{I}$$

gilt. Da in unserem Fall  $uu^T$  komplett real ist, gilt die Spektralnorm

$$\|H\|_2 = \sqrt{\max_{\lambda} (H \cdot H^*)} = \sqrt{\max_{\lambda} (HH^T)} = \sqrt{\max_{\lambda} \mathbb{I}} = \sqrt{1} = 1$$

Für das weitere Vorgehen macht es Sinn, die Matrix  $H$  zu berechnen als

$$\mathbb{I} - 2uu^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Die Norm  $\|H\|_{\infty}$  ist die sogenannte Zeilensummennorm, definiert für quadratische  $n \times n$ -Matrizen durch

$$\|H\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |h_{ij}|$$

oder auf gut deutsch die grösste Summe der Beträge einer Zeile der Matrix.  
In diesem Fall hier ist

$$\sum_{j=1}^n |h_{1j}| = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \sum_{j=1}^n |h_{2j}| = 1 \quad \sum_{j=1}^n |h_{3j}| = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

und da  $\sqrt{3} > 1$  ist auch  $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$  und die Zeilennorm ist

$$\|H\|_{\infty} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Analog dazu ist die Spaltennorm  $\|H\|_1$  definiert als

$$\|H\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \|H^T\|_{\infty}$$

wobei wir die letzte Eigenschaft ausnutzen werden. Da  $H$  eine Symmetrische Matrix ist gilt

$$\|A\|_1 = \|A^T\|_{\infty} = \|A\|_{\infty} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

## Aufgabe 5

Das reelle Eigenwertproblem sucht nach der Frage welche Vektoren nach Anwendung der Abbildung im Vergleich zum ursprünglichen Vektor um einen Faktor  $\lambda$  gestreckt werden, oder mathematisch ausgedrückt

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

Es gilt zuerst die Eigenwerte der Matrix zu berechnen. Dies geschieht indem

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

nach dem unbekannten Parameter  $\lambda$  gelöst wird. Die Determinante von  $3 \times 3$ -Matrizen lässt sich am einfachsten mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz berechnen. Ich entwickle nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 1) - (\lambda - 1) + (1 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0 \end{aligned}$$

## Aufgabe 6

---

Da das Polynom keine Terme ohne  $\lambda$  hat ist 0 die erste Nullstelle. Ich teile das Polynom durch  $\lambda$ , multipliziere mit  $-1$  und löse das resultierende Polynom mit der Formel von Mitternacht:

$$\lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \implies \lambda_{2,3} \in \{1, 1\}$$

Zu diesen Eigenwerten gilt es nun zugehörige Eigenvektoren zu finden.

**Bemerkung 2 (Notation):** Man definiert für eine Matrix  $A$  den Kern von  $A$  als den Raum  $\vec{x}$  der die Gleichung

$$A\vec{x} = 0$$

eindeutig löst. Dabei  $\vec{x}$  muss nicht eindimensional sein.

Die Eigenvektoren lassen sich als Lösungen von

$$\text{Kern}(A - \lambda I)$$

berechnen. Das ergibt für jeden  $n$ -fachen Eigenwert  $\lambda_i$   $n$  Lösungen.

Wem das noch unklar ist wird hoffentlich bei der folgenden Berechnung verstehen was gemeint ist:

$$\lambda = 0: \text{Kern} \left( \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch dieses Gleichungssystem berechnet man nach dem Gauss-Algorithmus.

$$\begin{aligned} \lambda = 0: \text{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda = 1: \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Geometrisch interpretiert heisst das nun, dass alle Vektoren in Richtung von  $v_1$  auf den Nullvektor abgebildet werden. Weiter bedeutet das Resultat, dass die gesamte Ebene die durch  $v_2$  und  $v_3$  aufgespannt wird unter der Abbildung invariant ist, d.h. erhalten bleibt.



## Aufgabe 6

a) Bei der Transformation entkoppeln wir das System linearer Differentialgleichungen indem wir das Eigenwertproblem für die Matrix  $A$  lösen. Dafür ist zuerst wieder das charakteristische Polynom zu rechnen als

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

für den noch zu bestimmenden Parameter  $\lambda$ .

Ich entwickle die Determinante nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz für Determinanten nach der dritten Spalte, weil dort eine 0 vorkommt.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= -(1-\lambda) + 0 + (1-\lambda)(-\lambda \cdot (1-\lambda) - 1) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \end{aligned}$$

Dieses Polynom ist am einfachsten zu berechnen wenn wir eine Nullstelle kennen oder in diesem Fall erraten können. Mit etwas probieren kommt man darauf, dass 1 die Gleichung löst. Damit kann ich das Polynom mit Polynomdivision oder besser mit dem Hornerschema vereinfachen:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Somit ist das neue Polynom

$$\lambda^2 - \lambda - 2$$

mit der Mitternachtsformel lösbar:

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \lambda_{2,3} = \{2, -1\}$$

Da wir nun alle Eigenwerte bestimmt haben wissen wir, dass sich die Lösungen  $y_i$  als Linearkombinationen der Funktionen

$$y = \mathcal{L} \{e^t, e^{2t}, e^{-t}\}$$

ergibt. Zur genauen bestimmung dieser Linearkombinationen müssen wir zusätzlich die Eigenvektoren  $\vec{v}_\lambda$  bestimmen um über

$$\vec{y} = C_1 \vec{v}_1 e^t + C_2 \vec{v}_2 e^{2t} + C_3 \vec{v}_{-1} e^{-t}$$

## Aufgabe 6

---

einen eindeutigen Lösungsraum für das System zu erhalten, wobei die  $C_i$  beliebige Konstanten sind.

Eigenvektoren lassen sich am einfachsten als

$$v_{\lambda_i} = \text{Kern}(A - \lambda_i \mathbb{I})$$

berechnen.

$$\lambda = 1: \quad \text{Kern} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dies löst man am besten mit dem Algorithmus von Gauss. Ich werde den ersten Schritt nicht mehr aufschreiben, da er von hier an klar sein sollte.

$$\lambda = 1: \quad \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es muss immer eine Nullzeile entstehen, sonst hat man sich verrechnet. Dank dieser Nullzeile darf ich die dritte Komponente des Eigenvektors beliebig wählen und damit das Gleichungssystem lösen.

$$\lambda = 2: \quad \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda = -1: \quad \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die allgemeine Lösung des Gleichungssystems gegeben als

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

**b)** Da wir die gefundene Funktion für diese Aufgabe im Limes für  $t \rightarrow -\infty$  betrachten, macht es Sinn die einzelnen Basisfunktionen in diesem Limes anzuschauen.

Man stellt schnell fest dass  $e^t$  und  $e^{2t}$  dabei gegen 0 gehen, aber  $e^{-t}$  für  $t \rightarrow -\infty$  gegen Unendlich strebt. Somit ist klar dass wir eine Bedingung brauchen für die  $C_3$  im System gleich 0 wird.

Mathematisch können wir diese Bedingung umsetzen indem wir das System an der Stelle  $t = 0$  betrachten und  $C_3 = 0$  setzen. Das gibt uns Bedingungen für  $C_1$  und  $C_2$ . Spezifisch in diesem Fall heisst das

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder anders Ausgedrückt für alle  $C_1, C_2$  beliebig in  $\mathbb{R}$  ergeben die Anfangsbedingungen

$$y_1(0) = -C_2 \qquad y_2(0) = C_1 - C_2 \qquad y_3(0) = C_1 + C_2$$

ein System dass für  $t \rightarrow -\infty$  gegen 0 strebt.