Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Beispiellösung für Serie 4

Aufgabe 4.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

4.1a) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

(i) A, B, C und D sind Givens-Rotationen.

√ (ii) A, B und C sind Givens-Rotationen, nicht aber D.

√ (iii) Matrix A entspricht einer Drehung um ϕ im Uhrzeigersinn.

(iv) Matrix A entspricht einer Drehung um ϕ im Gegenuhrzeigersinn.

(v) Matrix B entspricht einer Drehung um ϕ um die $e^{(1)}$-Achse, $e^{(1)} = (1, 0, 0)^T$.

√ (vi) Matrix C entspricht einer Drehung um ϕ um die $e^{(2)}$-Achse im Gegenuhrzeigersinn von der positiven $e^{(2)}$-Achse aus betrachtet.

(vii) Matrix D ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(2)}$-Ebene.

√ (viii) Matrix D ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(3)}$-Ebene.

Lösung: Eine allgemeine $n \times n$-Givens-Rotation sieht so aus: für $1 \leq p < q \leq n$ definiert man die Givens-Rotationsmatrix $U_{pq}(\phi)$, indem man I_n an den vier Stellen i_{pp}, i_{pq}, i_{qp}, i_{qq} abändert wie folgt:

$$U_{pq}(\phi) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & & 0 & & \\ & \ddots & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & \cos\phi & 0 & \cdots & \sin\phi & 0 & \cdots \\ & & 0 & 1 & & 0 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & -\sin\phi & 0 & \cdots & \cos\phi & 0 & \cdots \\ & & 0 & & & 0 & 1 & \\ & & \vdots & & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow p-\text{te Zeile} \\ \\ \\ \leftarrow q-\text{te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ p-\text{te Spalte} & q-\text{te Spalte} \end{array} & \end{array}$$

Um die geometrische Bedeutung der Abbildungen zu verstehen, betrachtet man ihre Wirkung auf die jeweiligen Einheitsvektoren.

A: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}.$
Die Abbildung entspricht einer Drehung um 0 in $\mathbb{R}^2$, um den Winkel ϕ (im Uhrzeigersinn). Die Matrix ist eine Givens-Rotation.

B: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$
Die Abbildung entspricht einer Drehung in $\mathbb{R}^3$ um die $e^{(3)}$-Achse (im Uhrzeigersinn, von der positiven Seite der $e^{(3)}$-Achse aus gesehen), um den Winkel ϕ. Die Matrix ist auch eine Givens-Rotation.

C: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\phi \\ 0 \\ -\sin\phi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sin\phi \\ 0 \\ \cos\phi \end{bmatrix}.$
Die Abbildung entspricht einer Drehung in $\mathbb{R}^3$ um die $e^{(2)}$-Achse (im Gegenuhrzeigersinn, von der positiven Seite der $e^{(2)}$-Achse aus gesehen), um den Winkel ϕ. Die Matrix ist auch eine Givens-Rotation.

D: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\phi \\ 0 \\ -\sin\phi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sin\phi \\ 0 \\ \cos\phi \end{bmatrix}.$
Die Abbildung entspricht einer Drehung in $\mathbb{R}^3$ um die $e^{(2)}$-Achse (im Gegenuhrzeigersinn, von der positiven Seite der $e^{(2)}$-Achse aus gesehen), um den Winkel ϕ, kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(3)}$-Ebene. Die Matrix ist keine Givens-Rotation, sondern eine Givens-Matrix mal eine Spiegelungsmatrix. Die Spiegelungsmatrix ist hier:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4.2

Sei I_2 die $2 \times 2-$Einheitsmatrix und $u = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T$.

4.2a) Für welche Werte des Parameters α ist die Matrix $V := I_2 - \alpha u\, u^T$ orthogonal?

Lösung: Wir können die möglichen Werte von α auf folgende Art finden: V ist orthogonal, falls $V^T V = I_2$. Da $I_2^T = I_2$ und $(u\, u^T)^T = u\, u^T$, folgt

$$V^T = (I_2 - \alpha u\, u^T)^T = I_2 - \alpha u\, u^T = V \quad \text{und damit}$$

$$\begin{aligned} V^T V = V\, V &= (I_2 - \alpha u\, u^T)\,(I_2 - \alpha u\, u^T) \\ &= I_2\, I_2 - I_2\, \alpha u\, u^T - \alpha u\, u^T\, I_2 + \alpha u\, u^T\, \alpha u\, u^T \\ &= I_2 - 2\alpha u\, u^T + \alpha^2\, u\, \underbrace{u^T\, u}_{=u_1^2+u_2^2=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1}\, u^T \\ &= I_2 + (-2\alpha + \alpha^2) u\, u^T \end{aligned}$$

Da $u\, u^T$ nicht die Nullmatrix ist, gilt $V^T V = I_2$ genau dann, wenn $-2\alpha + \alpha^2 = 0$, also für $\alpha = 2$ oder $\alpha = 0$ (dann ist $V = I_2$ trivialerweise orthogonal).

Eine $n \times n$-Matrix der Form $I_n - 2u\, u^T$ mit $u^T\, u = 1$ ist immer orthogonal. Man nennt eine solche Matrix *Householdermatrix*. Siehe dazu die Seite 32 vom Buch.

4.2b) Lösen Sie für die in 4.2a) ermittelten Werte von α das Gleichungssystem

$$V\, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ohne das Gauss'sche Eliminationsverfahren zu benützen.

Lösung: <u>Für $\alpha = 0$:</u>

$$V\, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad I_2\, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

<u>Für $\alpha = 2$:</u> Da V orthogonal, $V^T = V$ und $Vx = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, folgt:

$$\begin{aligned} V\, x &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \quad V\, V\, x &= V \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \overset{V=V^T}{\Rightarrow} \quad V^T\, V\, x &= V \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \overset{V \text{ orthogonal}}{\Rightarrow} \quad I_2\, x &= V \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \quad x = V \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/5 \\ 13/5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für eine Householdermatrix Q gilt immer $Q = Q^T = Q^{-1}$. Dies folgt aus

$$(I_n - 2u\, u^T)^T = I_n - 2(u^T)^T\, (u)^T = I_n - 2u\, u^T\ .$$

4.2c) Kontrollieren Sie 4.2a) und 4.2b) mit MATLAB.

Lösung:

Die folgenden Zeilen liefern das Gewünschte:

Listing 4.1: Serie 4, Aufgabe 4.2c)

```
% Teil 2a)
u = [ 2; -1 ] / sqrt(5) ;
% eye(N) = NxN Einheitsmatrix
V_a0 = eye(2);
V_a2 = eye(2) - 2 * u * u';
% Orthogonalitaet-check: transponierte(V)*V
VV_a0 = V_a0' * V_a0
VV_a2 = V_a2' * V_a2

% Teil 2b)
b = [1; 3];
x_a0  = V_a0\b
xx_a0 = V_a0*b
x_a2  = V_a2\b
xx_a2 = V_a2*b
```

Der Code gibt:

```
VV_a0 =
     1     0
     0     1
VV_a2 =
    1.0000    0.0000
    0.0000    1.0000
x_a0 =
     1
     3
xx_a0 =
     1
     3
x_a2 =
    1.8000
    2.6000
xx_a2 =
    1.8000
    2.6000
```

Falls $\alpha = 0$ oder $\alpha = 2$ folgt $V^T V = I_2$, also ist V orthogonal.

Weil $V = V^T = V^{-1}$, erhalten wir $x = V^{-1}b = Vb$.

Aufgabe 4.3

Gegeben sei

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2/5 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

4.3a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A, d.h. entsprechende Matrizen L, R und P, für welche $PA = LR$ gilt.

Lösung: Wir gehen vor wie im Buch auf S. 38 beschrieben:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2/5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 6 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & \mathbf{0} & \mathbf{1/5} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 6 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & \mathbf{0} & \mathbf{1/5} \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & \mathbf{4/5} & \mathbf{38/5} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & \mathbf{4/5} & \mathbf{38/5} \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 0 & \mathbf{1/5} \end{array}.$$

Somit können wir ablesen:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4/5 & 38/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix},$$

und es gilt $PA = LR$.

4.3b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit MATLAB.
Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, für

$$b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 15/4 \\ 7/4 \\ 9/2 \end{bmatrix},$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung mit MATLAB.

Hinweis: MATLAB Hilfe für den Befehl `lu` anschauen.

Lösung: Die folgenden Zeilen liefern die gewünschte Zerlegung:

Listing 4.2: Serie 4, Aufgabe 4.3b)

```
A = [ 5 1 2; 2 2/5 1; -4 0 6 ];
b_1 = [ 7; 3; -2 ];
b_2 = [ 15/4; 7/4; 9/2 ];

% LR Zerlegung:
[L,R,P] = lu(A)

% Vorwaerts/Rueckwaertseinsetzen:
x_1 = R\( L\( P*b_1 ) )
x_2 = R\( L\( P*b_2 ) )
```

Aufgabe 4.4

Die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kann entweder durch Drehung oder Spiegelung realisiert werden. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Drehmatrix Q_{21} und eine Spiegelungsmatrix H_1, so dass

$$Q_{21}A = R_1, \qquad H_1 A = R_2,$$

wobei R_1 und R_2 Rechtsdreiecksmatrizen sind. Geben Sie dann für $i = 1, 2$ eine orthogonale Matrix Q_i und eine Rechtsdreiecksmatrix R_i an, so dass $A = Q_i R_i$.

Lösung:

Q_{21}: Eine Drehmatrix Q_{21} kann man als

$$Q_{21} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

schreiben, wobei $\theta \in [0, 2\pi]$. Wir berechnen $Q_{21}A$ und da R_1 eine Rechtsdreiecksmatrix sein soll, folgt

$$\cos(\theta) - \sin(\theta) = (R_1)_{21} = 0.$$

Damit haben wir $\theta = \frac{\pi}{4}$ oder $\theta = \frac{5\pi}{4}$. Für $\theta = \frac{\pi}{4}$, folgt es

$$Q_{21}^+ = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deshalb

$$Q_1^+ = \left(Q_{21}^+\right)^T = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_1^+ = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Für $\theta = \frac{5\pi}{4}$, gilt es

$$Q_{21}^- = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -Q_{21}^+.$$

Deshalb

$$Q_1^- = \left(Q_{21}^-\right)^T = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad R_1^- = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

H_1: Die Matrix H_1 ist die Householdermatrix (siehe Beispiel 2 auf Seite 32 vom Buch). Sei v der erste Spaltenvektor von A und $u = v \pm \|v\| e_1$, wobei $e_1 = [1, 0]^T$. Dann ist die Householdermatrix $H_1 = I_2 - 2\frac{uu^T}{\|u\|^2}$, wobei I_2 ist die Identitätsmatrix. Für $u = v - \|v\| e_1$, gilt es

$$H_1^- = \frac{1 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und deshalb

$$Q_2^- = \left(H_1^-\right)^T = H_1^-, \qquad R_2^- = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Für $u = v + \|v\| e_1$, haben wir

$$H_1^+ = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -H_1^-$$

und deshalb

$$Q_2^+ = \left(H_1^+\right)^T = H_1^+, \qquad R_2^+ = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$