# Beispiellösung für Serie 5

## Aufgabe 5.1

**5.1a)** Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (i) Die Menge aller $n \times n$ Matrizen bilden einen reellen Vektorraum.

Richtig. Die Summe von zwei $n \times n$ Matrizen $A$ und $B$, also $A + B$ ist wieder eine $n \times n$ Matrix. Ebenso verhält es sich bei Multiplikation mit einem reellen Faktor $\lambda$. Wir müssen alle Rechenregeln in der Definition des reellen Vektorraums auf Seite 68 im Buch überprüfen:

- (A1)+(A2): Wegen Satz 2.1 gilt

$$A + B = B + A$$
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

  für alle $n \times n$ Matrizen $A$, $B$, $C$ .

- (A3): Die Nullmatrix 0 der Grösse $n \times n$ ist in der Menge enthalten und es gilt:

$$A + 0 = A$$

  für alle $n \times n$ Matrizen $A$.

- (A4): Die Matrix $-A$ ist für alle $n \times n$ Matrizen $A$ in der Menge enthalten und es gilt:

$$A + (-A) = 0.$$

- (M1): Seien $\alpha$ und $\beta$ in $\mathbb{R}$ und $A$ eine $n \times n$ Matrix. Die Matrix $\alpha(\beta A)$ ist genau dann gleich $(\alpha\beta)A$, wenn alle Einträge übereinstimmen. Wegen

$$(\alpha(\beta A))_{ij} = \alpha(\beta A))_{ij} = \alpha\beta(A)_{ij} = (\alpha\beta)(A)_{ij} = ((\alpha\beta)A)_{ij}$$

  für alle $i, j$ in $\{1, \ldots, n\}$, ist dies der Fall. Dafür haben wir insbesondere die Definition der Multiplikation mit einer Zahl auf Seite 23 gebraucht.

- (M2): Seien $\alpha$ und $\beta$ in $\mathbb{R}$ sowie $A$ und $B$ $n \times n$ Matrizen.
  Wiederum gilt $(\alpha + \beta)A$ ist genau dann gleich $\alpha A + \beta A$, wenn alle Einträge übereinstimmen. Wegen

$$((\alpha + \beta)A)_{ij} = (\alpha + \beta)(A)_{ij} = \alpha(A)_{ij} + \beta(A)_{ij} = (\alpha A)_{ij} + (\beta A)_{ij} = (\alpha A + \beta A)_{ij}$$

  für alle $i, j$ in $\{1, \ldots, n\}$, ist dies erfüllt.
  Es gilt $\alpha(A + B)$ ist genau dann gleich $\alpha A + \alpha B$, wenn alle Einträge übereinstimmen. Wegen

$$\begin{aligned}(\alpha(A + B))_{ij} &= \alpha(A + B)_{ij} = \alpha((A)_{ij} + (B)_{ij}) = \alpha(A)_{ij} + \alpha(B)_{ij} \\ &= (\alpha A)_{ij} + (\alpha B)_{ij} = (\alpha A + \alpha B)_{ij}\end{aligned}$$

  für alle $i, j$ in $\{1, \ldots, n\}$, gilt dies ebenso.

- (M3): Offensichtlich gilt $1A = A$ für alle $n \times n$ Matrizen $A$.

Also bildet die Menge aller $n \times n$ Matrizen einen reellen Vektorraum.

(ii) Die Menge aller regulären $n \times n$ Matrizen bilden einen reellen Vektorraum.

Falsch. Die Summe von zwei regulären $n \times n$ Matrizen ist nicht immer eine reguläre Matrix. Zum Beispiel sind $I_n$ und $-I_n$ zwei reguläre $n \times n$ Matrizen, ihre Summe ist die 0-Matrix, welche klar nicht regulär ist.

**5.1b)** Die Menge $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ bildet einen Unterraum von $\mathbb{R}^4$.

(i) Richtig. $\surd$ (ii) Falsch.

**Lösung:** Falsch. Nehmen wir zwei Elemente aus dem Raum:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ und } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Addition ergibt:

$$u + v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (t_u + t_v) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

was nicht mehr in dem Raum liegt.

**5.1c)** Die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

(i) Richtig. $\surd$ (ii) Falsch.

**Lösung:** Der $\mathbb{R}^3$ ist 3-dimensional. Nach Satz 4.3 (ii) können weniger als 3 Vektoren nicht erzeugend sein, das heisst, die Aussage ist falsch.

**5.1d)** In welchen Fällen bilden die Vektoren keine Basis von $\mathbb{R}^3$?

$\surd$ (i) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\surd$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

**Lösung:** Eine Basis ist ein Erzeugendensystem, das aus linear unabhängigen Vektoren besteht. Nach Satz 4.3 besteht eine Basis im $\mathbb{R}^3$ aus genau 3 Vektoren.

(i) Die Vektoren können keine Basis sein, da es vier Vektoren sind.

(ii) Die Vektoren können keine Basis sein, da es zwei Vektoren sind.

## Aufgabe 5.2

Gegeben sei eine orthogonale Matrix $A$. Geben Sie die Matrizen $Q$ und $R$ einer QR-Zerlegung von $A$ an.

**Lösung:** Gesucht ist eine orthogonale Matrix $Q$ und eine Rechtsdreiecksmatrix $R$, so dass

$$A = QR.$$

Es gilt jedoch

$$A = AI.$$

und wir wissen, dass $A$ orthogonal ist. Zudem ist die Einheitsmatrix $I$ auch eine Rechtsdreiecksmatrix. Also definieren wir $Q := A$ und $R := I$ und damit haben wir eine QR-Zerlegung von $A$.

## Aufgabe 5.3

**5.3a)** Sei $V$ die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$: $\left\{[x, y, 2x + y]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$. Zeigen Sie, dass $V$ ein Unterraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

**Lösung:** $V$ ist offensichtlich eine nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}^3$. Wir müssen also noch die restlichen zwei Bedingungen für Unterräume in der Definition auf Seite 72 überprüfen.

Wir zeigen: $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ :

- Seien $a = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 2x_1 + y_1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 2x_2 + y_2 \end{bmatrix} \in V$. Es gilt:

$$a + b = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 2x_3 + y_3 \end{bmatrix} \in V,$$

  wobei $x_3 = x_1 + x_2$, $y_3 = y_1 + y_2$.

- Sei $a$ wie oben, $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\alpha a = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ 2\alpha x_1 + \alpha y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 2x_4 + y_4 \end{bmatrix} \in V,$$

  wobei $x_4 = \alpha x_1$, $y_4 = \alpha y_1$.

Also ist $V$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

**5.3b)** Ist die Menge $W = \left\{[x, 2x + 1, x]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung:** $W$ ist offensichtlich eine nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}^3$. Wir müssen also noch die restlichen zwei Bedingungen für Unterräume in der Definition auf Seite 72 überprüfen.

Seien $a = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 1 \\ x_1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_2 + 1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in W$. Dann gilt:

$$a + b = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2(x_1 + x_2) + 2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \notin W.$$

$W$ ist also <u>kein</u> Unterraum von $\mathbb{R}^3$!

**Bemerkung:** Wenn wir zeigen wollen, dass etwas im Allgemeinen gilt, so müssen wir es für *alle* Fälle nachprüfen (wie hier bei Teilaufgabe 5.3a), wir prüfen es für *alle* $a, b \in V$ und für *alle* $\alpha \in \mathbb{R}$). Wenn wir hingegen zeigen wollen, dass etwas im Allgemeinen *nicht* gilt, so genügt es *ein* Gegenbeispiel zu finden. Teilaufgabe 5.3b) lässt sich somit einfacher lösen, indem man z. B. feststellt, dass zwar $v := [1, 3, 1]^T$ ein Element von W ist (mit $x = 1$), aber $v + v = [2, 6, 2]^T$ nicht in $W$ ist (da kein $x \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $v + v = [x, 2x + 1, x]^T$).

## Aufgabe 5.4

Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen, ob die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abhängig oder linear unabhängig sind. Geben Sie eine Begründung an.

**a)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

**c)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

**Lösung:** Betrachte die $k$ Vektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ im Vektorraum $V$.

$a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ sind **linear unabhängig**, falls aus $x_1 a^{(1)} + \cdots + x_k a^{(k)} = 0$ folgt, dass $x_1 = \cdots = x_k = 0$ gilt. Sonst heissen sie **linear abhängig**.

Somit sind die Vektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ genau dann linear unabhängig, wenn das zugehörige homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ mit $A = [a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}]$ nur die triviale Lösung $x = 0$ hat. Nach Korollar 1.3 ist dies äquivalent zu $r = k$, wobei $r$ den Rang des Gleichungssystemes $Ax = 0$ bezeichnet.

In dieser Aufgabe ist $V = \mathbb{R}^n$ (mit $n = 3$ oder 4) und wir können die Bestimmung von der linearen Abhängigkeit mit Hilfe vom Gaussverfahren systematisieren:
Schreibe $A = [a^{(1)} \ldots a^{(k)}]$. $A$ ist eine $n \times k-$Matrix, wobei $n$ die Anzahl Zeilen ist. Mit dem Gauss-Algorithmus können wir $r = \text{Rang } A$ bestimmen.

Es gilt: Die Vektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ sind:

- linear unabhängig, falls $r = k$.
- linear abhängig, falls $r < k$.

Zudem können wir noch folgendes Resultat benutzen: Für einen Vektorraum $V$ der Dimension $n$ gilt allgemein (Satz 4.3 aus dem Buch): Falls $k > n$, sind $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ linear <u>abhängig</u>.

**a)**

$$\begin{array}{r} 2 \\ \\ -1 \end{array}\boxed{\begin{array}{rrr} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{r} \\ -1 \\ \\ \end{array}\boxed{\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} \overset{(E)_2}{\rightarrow} \begin{array}{r} \\ \\ -1 \end{array}\boxed{\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}},$$

also gilt $k = 3$, $r = 2$.

Da $r < k$ sind die Vektoren linear abhängig.

Hier sieht man die lineare Abhängigikeit direkt, da eine Liste von Vektoren, die den Nullvektor enthält, linear abhängig ist.

**b)**

$$\begin{array}{r} 2 \\ \\ 1 \\ -1 \end{array}\boxed{\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

also gilt $k = r = 3$. Da $r = k$, sind die Vektoren linear unabhängig.

**c)**

$$\begin{array}{r} \\ -1 \\ 2 \end{array}\boxed{\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{r} \\ -1 \\ \\ \end{array}\boxed{\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{array}} \overset{(E)_2}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}}$$

also $k = r = 3$, und damit sind die Vektoren linear unabhängig.

**d)**

$$\begin{array}{r} \\ 1 \\ -1 \end{array}\boxed{\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{r} \\ \\ -2 \end{array}\boxed{\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}} \overset{(E)_2}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}}$$

also $r = 3,\ k = 4$. Da $r < k$ sind die Vektoren linear abhängig.

Auch hier sieht man die lineare Abhängigkeit ohne Anwenden des Gaussverfahrens, indem man bemerkt, dass wir $k = 4$ Vektoren betrachten, aber die Dimension von $\mathbb{R}^3$ $n = 3$ ist ($k > n$).

## Aufgabe 5.5

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie den $\mathrm{Kern}$ der Matrizen und geben sie insbesondere jeweils eine Basis des $\mathrm{Kerns}$ an.

**Lösung:** $\mathrm{Kern}\, A$ ist definiert als die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Wir lösen also dieses Gleichungssystem mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\boxed{\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \end{array}}$$

$$\Rightarrow x_3 = s \in \mathbb{R} \text{ beliebig }, \ x_2 = \frac{8s}{2} = 4s, \ x_1 = -2(4s) - 3s = -11s.$$

Damit haben wir

$$\operatorname{Kern} A = \left\{ s \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine Basis des Kerns ist dann trivialerweise

$$\begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir gehen analog vor für $B$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_2 = 0, x_1 = 0.$$

Damit haben wir

$$\operatorname{Kern} B = \{0\}.$$

und dieser Vektorraum hat keine Basis (siehe Bemerkung auf S. 80 im Buch).

Für $C$ erhalten wir

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 16 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_4 = s \in \mathbb{R} \text{ beliebig}, x_3 = t \in \mathbb{R} \text{ beliebig}, x_2 = \frac{-4s}{2} = -2s, x_1 = -4s - 2t - 2(-2s) = -2t.$$

Die Lösungsmenge und damit der $\operatorname{Kern}$ ist also

$$\operatorname{Kern} C = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Vektoren

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bilden eine Basis von $\operatorname{Kern} C$: Es ist klar, dass sie erzeugend sind, da wir jeden Vektor in der Lösungsmenge als Linearkombination von diesen zwei Vektoren schreiben können. Aufgrund der speziellen Struktur sind sie auch linear unabhängig: Zu überprüfen ist ja, ob das Gleichungssystem (geschrieben als Tableau)

$$\left[\begin{array}{rr|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

nur die Nulllösung hat. Man kann aber direkt eine Art Rückwärtseinsetzen durchführen und erhält nur die Nulllösung (vergleiche auch S. 122f im Buch).