# Beispiellösung für Serie 8

## Aufgabe 8.1

**8.1a)** Sei die $QR$-Zerlegung der $m \times n$ Matrix $A$ $(m > n)$ gegeben mit $Q$ orthogonal und $R = \left[\begin{array}{c} R_0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$. Die Spalten von $A$ seien linear abhängig. Dann ist die $n \times n$ Matrix $R_0$

√ (i) singulär. (ii) regulär.

**Lösung:** Gemäss Beweis von Satz 5.2, Punkt ii), auf p. 112 im Buch wissen wir $Ax = 0 \Leftrightarrow Rx = 0 \Leftrightarrow R_0 x = 0$. Sind die Spalten von $A$ linear abhängig, so hat das homogene System $Ax = 0$ und somit $R_0 x = 0$ nichttriviale Lösungen. Nach Satz 3.11 erhalten wir somit, dass $R_0$ singulär ist.

**8.1b)** Falls die Spaltenvektoren der Matrix der Fehlergleichungen linear unabhängig sind, so haben die Normalgleichungen

√ (i) genau eine Lösung. (ii) unendlich viele Lösungen. (iii) keine Lösung.

**Lösung:** Es gibt genau eine Lösung gemäss Satz 5.1, Punkt ii) auf p. 106 im Buch.

Gegeben sind die drei Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, in der Ebene mit

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | 5.41 | 5.17 | 5.93 |

Es soll mit Hilfe der Ausgleichsrechnung eine lineare Funktion $y = f(x) = ax + b$ gefunden werden, so dass die Summe der Fehlerquadrate in $y$–Richtung

$$\sum_{i=1}^{3} [f(x_i) - y_i]^2$$

minimal wird (lineare Regression).

**8.1c)** Die Matrix der Fehlergleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 5.41 \\ 1 & 5.17 \\ 2 & 5.93 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5.41 & 5.17 & 5.93 \end{bmatrix}$ $\surd$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

**Lösung:** $f(x) = ax + b \Rightarrow\ f(0) = b,\ f(1) = a + b,\ f(2) = 2a + b.$
Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{rl} b & -5.41 = r_1 \\ a + b & -5.17 = r_2 \\ 2a + b & -5.93 = r_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{=:z} - \underbrace{\begin{bmatrix} 5.41 \\ 5.17 \\ 5.93 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{c}} = \mathbf{r}.$$

Also ist hier die dritte Antwort richtig.

**8.1d)** Die Matrix der Normalgleichungen lautet:

$\surd$ (i) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & 17.03 \\ 17.03 & 91.1619 \end{bmatrix}$

**Lösung:** Von Satz 5.1 aus dem Buch wissen wir, dass die Lösung der Normalgleichungen $A^\top A\, z = A^\top \mathbf{c}$ die Fehlergleichungen im Sinne der kleinsten Quadrat minimiert.

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Also ist hier die erste Antwort richtig.

**8.1e)** Daraus ergibt sich für die Parameter der linearen Funktion:

(i) $a = 0.27, b = 5.21\overline{2}$ $\surd$ (ii) $a = 0.26, b = 5.24\overline{3}$ (iii) $a = 0.15, b = 5.24\overline{7}$

wobei wir mit dem Überstrich die periodische Dezimalbruchdarstellung bezeichnen.

**Lösung:** Löse $A^\top A\, z = A^\top \mathbf{c}$: Es gilt $A^\top \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 17.03 \\ 16.51 \end{bmatrix}$ und mit Hilfe des Gaussverfahrens:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 17.03 \\ 3 & 3 & 16.51 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 17.03 \\ 0 & \frac{6}{5} & 6.292 \end{array}\right] \Rightarrow b = 5.24\overline{3},\ a = 0.26.$$

Damit ist die zweite Antwort richtig.

## Aufgabe 8.2

Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:

| Z–G | S–G | G–C | C–S | Z–C |
|---|---|---|---|---|
| 280 | 390 | 400 | 210 | 118 |

Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht, und er interessiert sich nun für die tatsächlichen Distanzen $a, b, c$.

**8.2a)** Bestimmen Sie für ihn die ausgeglichenen Werte für die Längen $a, b, c$ der Teilstrecken durch Lösen der Normalgleichungen.

**Lösung:** Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a \quad\quad -280 = r_1 \\ a+b-390 = r_2 \\ a+c-400 = r_3 \\ b+c-210 = r_4 \\ c \quad\quad -118 = r_5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{=:x} - \underbrace{\begin{bmatrix} 280 \\ 390 \\ 400 \\ 210 \\ 118 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{c}} = \mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \; Ax - \mathbf{c} = \mathbf{r}$$

Normalgleichungen: $A^\top Ax = A^\top \mathbf{c}$, wobei

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \; A^\top \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1070 \\ 600 \\ 728 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ Gausselimination}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1070 \\ 1 & 2 & 1 & 600 \\ 1 & 1 & 3 & 728 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 600 \\ 0 & -5 & -2 & -730 \\ 0 & -1 & 2 & 128 \end{array}\right] \overset{(E)_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 2 & 128 \\ 0 & 0 & -12 & -1370 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c = \frac{1370}{12} = 114.1\overline{6} = \frac{685}{6} \\ -b + 2c = 128 \;\Rightarrow\; b = \frac{1204}{12} = 100.\overline{3} = \frac{301}{3} \\ a + 2b + c = 600 \;\Rightarrow\; a = \frac{3422}{12} = 285.1\overline{6} = \frac{1711}{6} \end{array}\right.$$

**8.2b)** Bestimmen Sie $a, b, c$ mit Hilfe der QR–Zerlegung in MATLAB.

**Lösung:** Matlab: Vorbereitung:

```
%lange Dezimaldarstellung
format long
%Eingabe der Daten
A=[1 0 0;
   1 1 0;
   1 0 1;
   0 1 1;
   0 0 1];
c=[280 390 400 210 118]';
```

Lösen von $Ax - c = r$ mit Hilfe der QR-Zerlegung (siehe Algorithmus Seite 113 im Buch):

```
%QR-Zerlegung von A
[Q,R]=qr(A);
%Transformation von c
d=Q'*c;
%Rueckwaertseinsetzen
xqr=R(1:3,1:3)\d(1:3)
```

Ergibt die Lösung:

```
xqr =
  1.0e+02 *
   2.851666666666667
   1.003333333333333
   1.141666666666667
```

**8.2c)** Lösen Sie diese Aufgabe nochmals mit dem '\'-Operator in MATLAB.

**Lösung:** Lösen mit Hilfe des '\'–Operator:

```
xbackslash=A\c
```

Ergibt die Lösung:

```
xbackslash =
  1.0e+02 *
   2.851666666666667
   1.003333333333333
   1.141666666666667
```

Der '\'–Operator in Matlab, den wir bisher zur Lösung von linearen Gleichungssystemen der Form $Ax = b$ verwendet haben, kann auch zur Lösung von überbestimmten Gleichungssystemen mit zugehöriger Fehlergleichung der Form $Ax - c = r$ genutzt werden. Das überbestimmte Gleichungssystem wird nach den Regeln der Ausgleichrechnung - Methode der kleinsten Quadrate (Kapitel 5) gelöst.

## Aufgabe 8.3

Gegeben seien die Vektoren

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

**8.3a)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, d. h. zeigen Sie, dass $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$

- Einheitsvektoren sind,
- paarweise orthogonal sind,

- eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

**Lösung:** Einheisvektoren: Zu zeigen ist, dass $v^{(1)},\ v^{(2)},\ v^{(3)}$ die Länge 1 haben:

$$\left\|v^{(1)}\right\| = \sqrt{(v^{(1)}, v^{(1)})} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{12}} = 1$$
$$\left\|v^{(2)}\right\| = \sqrt{(v^{(2)}, v^{(2)})} = \sqrt{\frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{3}} = 1$$
$$\left\|v^{(3)}\right\| = \sqrt{(v^{(3)}, v^{(3)})} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{12}} = 1$$

Paarweise orthogonal: Zu zeigen ist, dass $(v^{(i)}, v^{(j)}) = 0$ für $i \neq j$:

$$(v^{(1)}, v^{(2)}) = \frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{6} = 0$$
$$(v^{(1)}, v^{(3)}) = \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{12} = 0$$
$$(v^{(2)}, v^{(3)}) = \frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{6} = 0$$

Wegen der Symmetrie des Skalarprodukts gilt dann automatisch auch $(v^{(2)}, v^{(1)}) = 0$ usw.

Der $\mathbb{R}^3$ ist 3-dimensional. Nach Korollar 4.7 bilden die drei paarweise orthogonalen Einheitsvektoren $v^{(1)},\ v^{(2)},\ v^{(3)}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Zusammenfassend sind sie also eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$.

**Bemerkung:** Die drei Vektoren sind die Spalten der Cosinustransformationsmatrix der Grösse $3 \times 3$. Hier wurde dementsprechend gezeigt, dass diese Matrix orthogonal ist.

**8.3b)** Gegeben sei der Vektor $v = [1/\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{2}/\sqrt{3}]^T$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $w$ von $v$ auf die $v^{(1)}$-$v^{(2)}$-Ebene.

**Hinweis:** Der Vektor $w$ liegt in der $v^{(1)}$-$v^{(2)}$-Ebene und $v - w$ ist orthogonal zu allen Vektoren in der Ebene.

**Lösung:** $w$ liegt in der von $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ aufgespannten Ebene, daher gilt

$$w = \alpha v^{(1)} + \beta v^{(2)}, \tag{8.3.1}$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$v - w$ ist orthogonal zu allen Vektoren in der Ebene, insbesondere zu den Vektoren $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$. Daher gilt

$$(v - w, v^{(1)}) = 0,$$
$$(v - w, v^{(2)}) = 0.$$

Ausnützen der Linearität des Skalarprodukts und einsetzen von (8.3.1) in die obigen Gleichungen ergibt:

$$0 = (v - w, v^{(1)}) = (v, v^{(1)}) - (w, v^{(1)}) = \frac{5}{3} - \alpha,$$
$$0 = (v - w, v^{(2)}) = (v, v^{(2)}) - (w, v^{(2)}) = -\frac{1}{3} - \beta,$$

wobei wir

$$
\begin{aligned}
(v, v^{(1)}) &= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}, \\
(v, v^{(2)}) &= \frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}, \\
(w, v^{(1)}) &= (\alpha v^{(1)} + \beta v^{(2)}, v^{(1)}) = \alpha(v^{(1)}, v^{(1)}) + \beta(v^{(2)}, v^{(1)}) = \alpha 1 + \beta 0 = \alpha, \\
(w, v^{(2)}) &= (\alpha v^{(1)} + \beta v^{(2)}, v^{(2)}) = \alpha(v^{(1)}, v^{(2)}) + \beta(v^{(2)}, v^{(2)}) = \alpha 0 + \beta 1 = \beta
\end{aligned}
$$

ausgenutzt haben. Daher gilt $\alpha = \frac{5}{3}$ und $\beta = -\frac{1}{3}$. Schlussendlich erhalten wir

$$
w = \alpha v^{(1)} + \beta v^{(2)} = \frac{5}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3\sqrt{3}} \\ \frac{5\sqrt{2}}{6} \\ \frac{7\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} \end{bmatrix}.
$$