Dr. V. Gradinaru
D. Devaud, A. Hiltebrand

Beispiellösung Serie 1

1. *Multiple Choice: Online abzugeben.*
Man löse die folgenden zwei Gleichungssysteme mit dem Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & b_2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & b_3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & = & b_4 \end{array}$$

a) Für $b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 2$ ist die Lösung:

(i) $x_4 = \frac{7}{4},\ x_3 = -3,\ x_2 = \frac{3}{2},\ x_1 = 1$
(ii) $x_4 = \frac{6}{4},\ x_3 = -2,\ x_2 = \frac{5}{2},\ x_1 = 2$
$\surd$ (iii) $x_4 = \frac{5}{4},\ x_3 = -4,\ x_2 = \frac{7}{2},\ x_1 = 3$
(iv) $x_4 = \frac{3}{4},\ x_3 = -6,\ x_2 = \frac{9}{2},\ x_1 = 4$

b) Für $b_1 = 0,\ b_2 = -3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1$ ist die Lösung:

$\surd$ (i) $x_4 = -5,\ x_3 = 14,\ x_2 = -7,\ x_1 = -11$
(ii) $x_4 = -4,\ x_3 = 13,\ x_2 = -6,\ x_1 = -10$
(iii) $x_4 = -3,\ x_3 = 12,\ x_2 = -5,\ x_1 = -9$
(iv) $x_4 = -2,\ x_3 = 11\ x_2 = -4,\ x_1 = -8$

Mit dem Gauss–Algorithmus erhält man für die beiden Fälle:

$$\begin{array}{rrrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1a & 1b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 2 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1a & 1b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 18 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{rrrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1a & 1b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 12 & -5 & 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1a & 1b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & -10 \end{array}$$

Bitte wenden!

Es folgt durch Rückwärtseinsetzen:

a) $x_4 = \frac{5}{4},\ x_3 = -4,\ x_2 = \frac{7}{2},\ x_1 = 3$, also die dritte Antwort.

b) $x_4 = -5,\ x_3 = 14,\ x_2 = -7,\ x_1 = -11$, also die erste Antwort.

2. **a)** Wegen der Ohmschen und Kirchhoffschen Gesetze haben wir für den Knoten 2

$$\begin{aligned} I_{12} - I_{23} = 0 &\Leftrightarrow \frac{U_2 - U_1}{R_{12}} - \frac{U_3 - U_2}{R_{23}} = 0 \\ &\Leftrightarrow U_2 \left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} \right) - \frac{U_3}{R_{23}} = \frac{U}{R_{12}}. \end{aligned}$$

Für den Knoten 3 bekommen wir

$$\begin{aligned} I_{53} + I_{23} - I_{34} = 0 &\Leftrightarrow \frac{U_3 - U_5}{R_{53}} + \frac{U_3 - U_2}{R_{23}} - \frac{U_4 - U_3}{R_{34}} = 0 \\ &\Leftrightarrow U_3 \left(\frac{1}{R_{53}} + \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{34}} \right) - \frac{U_5}{R_{53}} - \frac{U_2}{R_{23}} = 0. \end{aligned}$$

Ausgehend von der Gleichung für den Knoten 5 folgt

$$\begin{aligned} I_{15} - I_{54} - I_{53} = 0 &\Leftrightarrow \frac{U_5 - U_1}{R_{15}} - \frac{U_4 - U_5}{R_{54}} - \frac{U_3 - U_5}{R_{53}} = 0 \\ &\Leftrightarrow U_5 \left(\frac{1}{R_{15}} + \frac{1}{R_{54}} + \frac{1}{R_{53}} \right) - \frac{U_3}{R_{53}} = \frac{U}{R_{15}}. \end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem für U_2, U_3 und U_5 ist dann

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}}\right) U_2 & -\frac{1}{R_{23}} U_3 & & = & \frac{U}{R_{12}} \\ -\frac{1}{R_{23}} U_2 & + \left(\frac{1}{R_{53}} + \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{34}}\right) U_3 & -\frac{1}{R_{53}} U_5 & = & 0 \\ & -\frac{1}{R_{53}} U_3 & + \left(\frac{1}{R_{15}} + \frac{1}{R_{54}} + \frac{1}{R_{53}}\right) U_5 & = & \frac{U}{R_{15}} \end{array} \right.$$

Wir schreiben es wie folgt in Matrixform

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} & -\frac{1}{R_{23}} & 0 \\ -\frac{1}{R_{23}} & \frac{1}{R_{53}} + \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{34}} & -\frac{1}{R_{53}} \\ 0 & -\frac{1}{R_{53}} & \frac{1}{R_{15}} + \frac{1}{R_{54}} + \frac{1}{R_{53}} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_5 \end{pmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{U}{R_{12}} \\ 0 \\ \frac{U}{R_{15}} \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

b) Für $R_{12} = R_{15} = R_{23} = R_{35} = R_{45} = R_{34} = 1$ und $U = 1$ bekommt man dann das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Siehe nächstes Blatt!

oder ausgeschrieben

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2U_2 & -U_3 & & = & 1 \\ -U_2 & +3U_3 & -U_5 & = & 0 \\ & -U_3 & +3U_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

Mit dem Gauss-Algorithmus erhalten wir

$$\begin{array}{rrr|r} U_2 & U_3 & U_5 & b \\ \hline 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} U_2 & U_3 & U_5 & b \\ \hline 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{rrr|r} U_2 & U_3 & U_5 & b \\ \hline 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{6}{5} \end{array}$$

und deshalb $\underline{U} = \frac{1}{13}\,(9, 5, 6)^T$.