Beispiellösung für Serie 10

Aufgabe 10.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen.

10.1a) Ist x ein Eigenvektor von A, dann ist x auch ein Eigenvektor von A^2.

√ (i) Richtig, (ii) Falsch.

Lösung: Sei x ein Eigenvektor von A und $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $Ax = \lambda x$. Dann gilt

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda^2 x, \tag{10.1.1}$$

und somit ist x ein Eigenvektor von A^2 mit Eigenwert λ^2.

10.1b) Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist λ auch ein Eigenwert von A^2.

(i) Richtig, √ (ii) Falsch.

Lösung: Aufgrund von Gleichung (10.1.1) kann man sehen, dass die Eigenwerte von A^2 als λ^2 geschrieben werden können, wobei λ die Eigenwerte von A sind.

10.1c) Ist x ein Eigenvektor von A und auch ein Eigenvektor von B, dann ist x ein Eigenvektor von $A + B$.

√ (i) Richtig, (ii) Falsch.

Lösung: Sei x ein Eigenvektor von A und B. Dann gibt es λ_A und λ_B sowie $Ax = \lambda_A x$ und $Bx = \lambda_B x$. Es gilt

$$(A + B)x = Ax + Bx = \lambda_A x + \lambda_B x = (\lambda_A + \lambda_B)x.$$

10.1d) Ist λ ein Eigenwert von A und auch ein Eigenwert von B, dann ist λ ein Eigenwert von $A + B$.

(i) Richtig, √ (ii) Falsch.

Lösung: Seien

$$A = B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A und B, aber die einzigen Eigenwerte von $A + B$ sind 2 und 6.

10.1e) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda + 1$ ein Eigenwert von $A + I$.

√ (i) Richtig, (ii) Falsch.

Lösung: Sei x ein Eigenvektor von A mit $Ax = \lambda x$. Dann gilt

$$(A + I)x = Ax + Ix = \lambda x + 1x = (\lambda + 1)x.$$

10.1f) Ist $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, dann hat $A = u \cdot u^\top$ den Eigenvektor u.

√ (i) Richtig, (ii) Falsch.

Lösung: Wir haben

$$Au = (uu^\top)u = u(u^\top u) = \|u\|^2 u.$$

Damit ist u ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\|u\|^2$.

Aufgabe 10.2

10.2a) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix, d.h. bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Entwicklung nach der dritten Zeile:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) =& \begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 & -5 \\ -2 & 9-\lambda & 5 \\ 1 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
=& 1 \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 9-\lambda & 5 \end{vmatrix} - (-6) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ -2 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\
=& -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = (\lambda+2)(-\lambda^2 + 8\lambda - 16) \overset{!}{=} 0,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung durch Erraten der Nullstelle $\lambda = -2$ und anschliessende Polynomdivision gilt. Es folgt also

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_{2,3} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{-2} = 4.$$

Die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = -2$ ist 1, die von $\lambda = 4$ ist 2.
<u>$\lambda = -2$</u>:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & -5 & 0 \\ -2 & 11 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ x_3 \text{ frei}, x_2 = 5x_3,\ x_1 = 30x_3 \ \Rightarrow\ E_{-2} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit 1

<u>$\lambda = 4$</u>:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -5 & -5 & -5 & 0 \\ -2 & 5 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & -35 & -35 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ x_3 \text{ frei}, x_2 = -x_3,\ x_1 = 0 \ \Rightarrow\ E_4 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit $= 1 < 2 =$ algebraische Vielfachheit.

10.2b) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Entwicklung nach der ersten Reihe:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -5 \\ 5 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$=(-3-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + 10(-3-\lambda) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3$$

Suche nun die Nullstellen von $(3-\lambda)(1-\lambda)+10 = \lambda^2 - 4\lambda + 13 \Rightarrow \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$, wobei $i = \sqrt{-1}$. Die algebraische Vielfachheit ist auch jeweils 1.

$\underline{\lambda_1 = -3}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & -13 & \frac{33}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_3 \text{ frei}, x_2 = \frac{33}{26}x_3,\ x_1 = -\frac{17}{13}x_3$$

$$\Rightarrow E_{-3} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -34 \\ 33 \\ 26 \end{bmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit 1

$\underline{\lambda_2 = 2+3i}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5-3i & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1-3i & -5 & 0 \\ 5 & 2 & -1-3i & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -5-3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3i & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1-3i & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{(E)_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -5-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1-3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_3 \text{ frei}, x_2 = \frac{1+3i}{2}x_3,\ x_1 = 0, \Rightarrow E_{2+3i} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1+3i \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit 1

Nach Bemerkung 2 auf Seite 149 vom Buch wissen wir, dass falls $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+3i \\ 2 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2+3i$ ist, folgt:

$\overline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-3i \\ 2 \end{bmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda_2} = 2-3i (= \lambda_3)$.

$$\Rightarrow E_{2-3i} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1-3i \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

10.2c) Überprüfen Sie Ihr Resultat von **a)** und **b)** in MATLAB.
Hinweis: `[V,D] = eig(C)` gibt die Eigenwerte der Matrix C in der Diagonalen von D und die zugehörigen Eigenvektoren in den Spalten von V zurück.

Lösung:

Der Befehl `[V,D] = eig(A)` in Matlab liefert die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A:

```
A=[-1 -5 -5;
   -2  9  5;
    1 -6 -2];
[V,D]=eig(A)

%Ergibt die Matrizen
% V =
%
%   Column 1
%
%  -0.985861169851162
%  -0.164310194975194
%  -0.032862038995039
%
%   Column 2
%
%  -0.000000000000000 - 0.000000009258118i
%   0.707106781186547 + 0.000000009258118i
%  -0.707106781186548
%
%   Column 3
%
%  -0.000000000000000 + 0.000000009258118i
%   0.707106781186547 - 0.000000009258118i
%  -0.707106781186548
%
%
% D =
%
%   Column 1
%
%  -2.000000000000000
%                   0
%                   0
%
%   Column 2
%
%                   0
%   4.000000000000000 + 0.000000091650696i
%                   0
%
%   Column 3
%
%                   0
%                   0
%   4.000000000000000 - 0.000000091650696i
```

Die Resultate zeigen numerische Probleme bei der Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von A (Imaginäranteil).

Der Befehl `[V,D] = eig(B)` in Matlab liefert die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B:

```
B=[-3 0  0;
    2 3 -5;
    5 2  1];
[V,D]=eig(B)

% V =
%
%     Column 1
%
%     0.0000 + 0.0000i
%     0.8452 + 0.0000i
%     0.1690 - 0.5071i
%
%     Column 2
%
%     0.0000 + 0.0000i
%     0.8452 + 0.0000i
%     0.1690 + 0.5071i
%
%     Column 3
%
%     0.6291 + 0.0000i
%    -0.6106 + 0.0000i
%    -0.4811 + 0.0000i
%
%
% D =
%
%     Column 1
%
%     2.0000 + 3.0000i
%     0.0000 + 0.0000i
%     0.0000 + 0.0000i
%
%     Column 2
%
%     0.0000 + 0.0000i
%     2.0000 - 3.0000i
%     0.0000 + 0.0000i
%
%     Column 3
%
%     0.0000 + 0.0000i
%     0.0000 + 0.0000i
%    -3.0000 + 0.0000i
```

Die Eigenvektoren stimmen (bis auf eine Skalierung mit einer komplexen Zahl) überein; die Eigenwerte stimmen exakt überein.

Aufgabe 10.3

Sei A die 3×3-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.3a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit Hilfe der MATLAB Funktion `eig`.

Lösung:

Der folgende Code berechnet die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

```
A = [-4 5 -5 ; 5 2 1 ; -5 1 2];
[V,D] = eig(A)
```

Es gilt

```
V =
   -0.8165    0.0000   -0.5774
    0.4082    0.7071   -0.5774
   -0.4082    0.7071    0.5774

D =
   -9.0000         0         0
         0    3.0000         0
         0         0    6.0000
```

und die Eigenvektoren von A sind die Spalten von V und die Eigenwerte sind die Zahlen auf die Diagonale von D.

10.3b) Lösen Sie mit MATLAB das Eigenwertproblem für A^{-1}, A^2 und A^3. Was stellen Sie fest?

Lösung:

Der folgende Code berechnet die Eigenwerte und Eigenvektoren von A^{-1}, A^2 und A^3.

```
[V1,D1] = eig(A^-1)
[V2,D2] = eig(A^2)
[V2,D2] = eig(A^3)
```

Es gilt

```
V1 =
   -0.8165    0.5774    0.0000
    0.4082    0.5774    0.7071
   -0.4082   -0.5774    0.7071

D1 =
   -0.1111         0         0
         0    0.1667         0
         0         0    0.3333
```

```
V2 =
   -0.0000    0.5774   -0.8165
    0.7071    0.5774    0.4082
    0.7071   -0.5774   -0.4082

D2 =
    9.0000         0         0
         0   36.0000         0
         0         0   81.0000

V2 =
   -0.8165    0.0000   -0.5774
    0.4082    0.7071   -0.5774
   -0.4082    0.7071    0.5774

D2 =
 -729.0000         0         0
         0   27.0000         0
         0         0  216.0000
```

Man sieht, dass die Eigenvektoren von A^{-1}, A^2 und A^3 dieselben wie die von A sind (bis auf das Vorzeichen). Die Eigenwerte von A^k sind λ_i^k, wobei λ_i die Eigenwerte von A sind und $k = -1, 2, 3$.

10.3c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$-Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x folgendes gilt:

(i) λ^k ist ein Eigenwert von M^k ($k \in \mathbb{N}$) und x ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

Lösung:

(i) Aus $Mx = \lambda x$ folgt

$$M^k x = M^{k-1}(Mx) = \lambda M^{k-1} x = \lambda^2 M^{k-2} x = \cdots = \lambda^k x.$$

(ii) Wenn M invertierbar ist, dann ist $\lambda \neq 0$ und es gilt

$$Mx = \lambda x \Leftrightarrow x = \lambda M^{-1} x \Leftrightarrow (1/\lambda) x = M^{-1} x.$$