# Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

## Serie 3

### Aufgabe 3.1

*Multiple Choice: Online abzugeben.*

**3.1a)** Ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A$ orthogonal (d. h. $AA^T = A^T A = I_n$) ist für beliebige rechte Seiten $b$ eindeutig lösbar.

(i) richtig (ii) falsch

**3.1b)** Die LR-Zerlegung (ohne Zeilenvertauschung) der Matrix $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 & 6 \\ 10 & 8 & 5 & 14 \\ 15 & 14 & 17 & 36 \end{bmatrix}$ liefert $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ und $R = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

(i) richtig (ii) falsch

**3.1c)** Die Inverse einer symmetrischen Matrix, falls sie existiert, ist symmetrisch.

(i) richtig (ii) falsch

**3.1d)** Eine $n \times n$-Matrix $A$ ist nicht invertierbar genau dann, wenn das Gleichungssystem $Ax = b$ nicht für jedes $b$ lösbar ist.

(i) richtig (ii) falsch

**3.1e)** Sei $A$ eine $n \times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für jedes $b$ lösbar. Dann hat das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ mindestens eine nicht-triviale Lösung.

(i) richtig (ii) falsch

### Aufgabe 3.2

**3.2a)** Lösen Sie folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -6x_1 & + & 4x_2 & + & 14x_3 & = & -2 \end{array}$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung (mit Zeilenvertauschung).

**3.2b)** Lösen Sie das Gleichungssystem in Teilaufgabe 3.2a) nochmals mit Hilfe von MATLAB.

## Aufgabe 3.3

**3.3a)** Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $(A\,B)^T$, $A^T\,B^T$ und $B^T\,A^T$.

**3.3b)** Zeigen Sie, dass für *beliebige* quadratische Matrizen $C$ gilt, $C + C^T$ ist symmetrisch.

**3.3c)** Zeigen Sie, dass für *beliebige* Matrizen $M$ gilt, $M^T M$ und $M M^T$ sind symmetrisch.

**3.3d)** Beweisen Sie Ihre Antwort in Aufgabe 3.1c).

## Aufgabe 3.4

**3.4a)** Bestimmen Sie die $3 \times 3$-Matrizen, die beim Anwenden (von links) auf eine $3 \times 3$-Matrix A folgendes bewirken:

(i) $E_{21}$: subtrahiert dreimal die erste Zeile von der zweiten;

(ii) $E_{31}$: addiert zweimal die erste Zeile zur dritten;

(iii) $E_{32}$: subtrahiert einmal die zweite Zeile von der dritten;

(iv) $P$: vertauscht die zweite und die dritte Zeile.

*Hinweis:* Wenn man eine Zeile von/zu einer anderen subtrahieren/addieren will, dann soll man nur einen Eintrag der Einheitsmatrix abändern. Zum Beispiel addiert die folgende Matrix $E_{12}$ zweimal die zweite Zeile von $A$ zur ersten Zeile hinzu

$$E_{12}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**3.4b)** Seien $A$ und $R$ die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 14 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie Matrizen $M_1$, $M_2$ und $M_3$, so dass

$$M_1 M_2 M_3 A = R,$$

wobei $M_1$, $M_2$ und $M_3$ Matrizen aus Teilaufgabe 3.4a) sind.

*Hinweis:* Die Matrizen $M_1$, $M_2$ und $M_3$ kann man mit Hilfe des Gaussalgorithmus finden. Tatsächlich kann man jede Operation des Gaussalgorithmus als Matrixprodukt mit einer der Matrizen aus 3.4a) schreiben.

## Abgabe:

Semesterwoche 5 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.