# Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

## Serie 4

### Aufgabe 4.1

*Multiple Choice: Online abzugeben.*

**4.1a)** Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

(i) $A$, $B$, $C$ und $D$ sind Givens-Rotationen.

(ii) $A$, $B$ und $C$ sind Givens-Rotationen, nicht aber $D$.

(iii) Matrix $A$ entspricht einer Drehung um $\phi$ im Uhrzeigersinn.

(iv) Matrix $A$ entspricht einer Drehung um $\phi$ im Gegenuhrzeigersinn.

(v) Matrix $B$ entspricht einer Drehung um $\phi$ um die $e^{(1)}$-Achse, $e^{(1)} = (1, 0, 0)^T$.

(vi) Matrix $C$ entspricht einer Drehung um $\phi$ um die $e^{(2)}$-Achse im Gegenuhrzeigersinn von der positiven $e^{(2)}$-Achse aus betrachtet.

(vii) Matrix $D$ ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(2)}$-Ebene.

(viii) Matrix $D$ ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(3)}$-Ebene.

### Aufgabe 4.2

Sei $I_2$ die $2 \times 2-$Einheitsmatrix und $u = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T$.

**4.2a)** Für welche Werte des Parameters $\alpha$ ist die Matrix $V := I_2 - \alpha u\, u^T$ orthogonal?

**4.2b)** Lösen Sie für die in 4.2a) ermittelten Werte von $\alpha$ das Gleichungssystem

$$V\,x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ohne das Gauss'sche Eliminationsverfahren zu benützen.

**4.2c)** Kontrollieren Sie 4.2a) und 4.2b) mit MATLAB.

## Aufgabe 4.3

Gegeben sei

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2/5 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

**4.3a)** Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix $A$, d.h. entsprechende Matrizen $L$, $R$ und $P$, für welche $PA = LR$ gilt.

**4.3b)** Berechnen Sie die LR-Zerlegung von $A$ mit MATLAB.
Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, für

$$b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 15/4 \\ 7/4 \\ 9/2 \end{bmatrix},$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung mit MATLAB.

Hinweis: MATLAB Hilfe für den Befehl `lu` anschauen.

## Aufgabe 4.4

Die $QR$-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kann entweder durch Drehung oder Spiegelung realisiert werden. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Drehmatrix $Q_{21}$ und eine Spiegelungsmatrix $H_1$, so dass

$$Q_{21}A = R_1, \qquad H_1 A = R_2,$$

wobei $R_1$ und $R_2$ Rechtsdreiecksmatrizen sind. Geben Sie dann für $i = 1, 2$ eine orthogonale Matrix $Q_i$ und eine Rechtsdreiecksmatrix $R_i$ an, so dass $A = Q_i R_i$.

## Abgabe:

Semesterwoche 6 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.