Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 6

Aufgabe 6.1

6.1a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig. Dann hat das homogene Gleichungssystem

$$\lambda_1 a^{(1)} + ... + \lambda_n a^{(n)} = 0$$

nichttriviale Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann muss gelten $k \leq n$.

(iii) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

(iv) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

(v) Die Vektoren eines Erzeugendensystems können linear abhängig sein.

(vi) Falls die Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *keine* Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

6.1b) In welchen Fällen bilden die Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$

6.1c) In welchen Fällen bilden die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$

Aufgabe 6.2

6.2a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ (Begründung).

$$\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}.$$

6.2b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ c \\ b+c \end{bmatrix}.$$

Diese Vektoren spannen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf. Wie hängt die Dimension dieses Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

Aufgabe 6.3

Sei $\mathcal{P}_4$ der Raum der Polynome mit Grad strikt kleiner als 4. Die Monome 1, x, x^2, x^3 bilden eine Basis von $\mathcal{P}_4$, aber dies ist nicht die einzige Basis.
Die sogenannten Legendre-Polynome sind wie folgt definiert:

$$P_0(x) = 1, \quad P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i}(x^2-1)^i \text{ fü } i > 0.$$

Zeigen Sie, dass P_0, P_1, P_2, P_3 eine Basis von $\mathcal{P}_4$ bilden.

Aufgabe 6.4

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}.$$

6.4a) Geben Sie das Bild der Matrizen an und bestimmen Sie insbesondere jeweils eine Basis des Bildes.

6.4b) Geben Sie die Dimension des Bildes und des Kerns an (vergleiche dazu auch Serie 5 Aufgabe 5.5). Überprüfen Sie dann, dass Satz 6.1iii) für die gegebenen Matrizen erfüllt ist, d. h. dass für jede Matrix $M \in \{A, B, C\}$

$$\dim(\mathrm{Kern}\, M) + \dim(\mathrm{Bild}\, M) = n$$

gilt, wobei n die Anzahl Spalten von M bezeichnet.

Abgabe:

Semesterwoche 8 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.