Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 13

Aufgabe 13.1

13.1a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear:

(i) $\mathcal{F} : x \mapsto ax + b$ mit $x, a, b \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathcal{F} : x \mapsto ax$ mit $x, a \in \mathbb{R}$

(iii) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax + b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$

(iv) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

(v) $\mathcal{F} : x \mapsto x^2 + 3x$ mit $x \in \mathbb{R}$

(vi) $\mathcal{F} : x \mapsto exp(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

13.1b) Wir betrachten die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch $x_2 = x_3$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf E projiziert. Welche Aussagen treffen zu?

(i) Die Matrix A, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(ii) Die Matrix A, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(iii) Es gilt dim(Kern A) = 1.

(iv) Es gilt dim(Kern A) = 2.

(v) Es gilt dim(Bild A) = 2.

(vi) Es gilt dim(Bild A) = 1.

Aufgabe 13.2

13.2a) Lösen Sie das Ausgleichungsproblem

$$Ac = b,$$

für

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

mit Hilfe der Singulärwertzerlegung.

Hinweis: Betrachten Sie für die Singulärwertzerlegung hier hauptsächlich das Eigenwertproblem zu AA^T (und nicht zu A^TA), um die Berechnungen zu vereinfachen.

13.2b) Lösen Sie **a)** mit MATLAB.

Aufgabe 13.3

Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathbb{R}^2$ in sich.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}.$$

13.3a) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ (in der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$) beschrieben?

13.3b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathcal{F}$ längentreu ist.

Aufgabe 13.4

Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung $\mathcal{F} : V \to W$, wobei V, W endlichdimensionale Vektorräume bezeichnen. Zeigen Sie folgende Aussagen:

13.4a) Sind $x_1, \ldots, x_k,\ k \in \mathbb{N}$ in V linear abhängig, so sind auch $\mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_k)$ linear abhängig.

13.4b) Sind die Vektoren $\mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_k)$ linear unabhängig, so sind auch $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig.

Aufgabe 13.5

Sei $\mathcal{P}_4$ der Vektorraum der Polynome vom Grad < 4. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}_4$ in sich:

$$\mathcal{P}_4 \ni P(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad Q(x) = P'(x) \in \mathcal{P}_4,$$

die jedem Polynom $P(x)$ das Polynom $Q(x) = P'(x)$ zuordnet ($P'(x)$ bedeutet die Ableitung von $P(x)$ nach x).

13.5a) Zeigen Sie: $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung.

13.5b) Gegeben sei im Urbildraum und im Bildraum die Basis $1,\ x,\ x^2,\ x^3$. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

Aufgabe 13.6

Gegeben sei der Vektorraum $V^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis. Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -5/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & -5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von V^3 nach V^3.

13.6a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Matrix T der Koordinatentransformation.

13.6b) Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten (in $W^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis) beschrieben?

13.6c) Interpretieren Sie die Abbildung in den ursprünglichen Koordinaten (in V^3) geometrisch.

Abgabe:

Keine Abgabe ausser der Multiple Choice-Aufgabe, die bis am 25.12. online abgegeben werden kann.