Dr. V. Gradinaru
A. Hiltebrand
D. Devaud

Online-Test 1

Einsendeschluss: Montag, der 17.11.2014 10:00 Uhr

Dieser Test ist als Angebot zu verstehen. Er dient, seriös bearbeitet, als Repetition des bisherigen Vorlesungsstoffes und als Training für die Prüfung. Es werden auch Lösungen veröffentlicht werden.

---

1. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

√ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Die Matrix ist nicht invertierbar.

Mit Hilfe des Gauss-Algorithmus folgt sofort die richtige Antwort:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Für beliebige $n \times n$-Matrizen A und B gilt

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Siehe Bemerkung auf Seite 25 im Buch. Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ, d. h. im Allgemeinen gilt $AB \neq BA$. Zum Beispiel haben wir für

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

die Beziehungen

$$(A-B)^2 = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -8 & -7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -33 & 2 \\ -12 & 19 \end{bmatrix} = A^2 - 2AB + B^2.$$

3. Sei A eine $n \times n$ – Matrix. Dann gilt:

$$A \text{ regulär } \iff$$
$$\text{Die Spalten von } A \text{ sind linear unabhängig.}$$

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Nach Satz 2.8 ist eine Matrix A regulär bzw. invertierbar, genau dann wenn das Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$ hat. Die Spalten $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ von A sind nach Definition linear unabhängig, falls das Gleichungssystem

$$x_1 a^{(1)} + \cdots + x_n a^{(n)} = 0,$$

nur die triviale Lösung $x_1 = \cdots = x_n = 0$ hat, d.h. $Ax = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$ hat.

4. Sei A eine $n \times n$ – Matrix. Dann gilt:

$$Ax = 0 \text{ hat nur die Lösung } x = 0 \iff$$
$$\text{Die Spalten von } A \text{ sind linear unabhängig.}$$

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Gemäss Aufgabe 3 sind die Spalten von A linear unabhängig, genau wenn A regulär ist. Nach Satz 2.8 ist eine Matrix A regulär bzw. invertierbar, genau dann wenn das Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$ hat.

5. Gegeben sei $Ax = b$, wobei

$$A = \left[a^{(1)} \ldots a^{(n)}\right] \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$b \in \mathbb{R}^m \text{ mit } b \notin \operatorname{span}\left\{a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}\right\}.$$

Dann existiert keine Lösung von $Ax = b$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Wenn $x = [x_1, ..., x_n]^T$ Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist, dann ist $x_1 a^{(1)} + ... + x_n a^{(n)} = b$. Um b als solche Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(n)}$ darzustellen, muss aber gelten $b \in \operatorname{span}\left\{a^{(1)}, ..., a^{(n)}\right\}$.

6. Sei A eine 2×4 – Matrix vom Rang 2. Dann besitzt $A\,x = 0$ eine nichttriviale Lösung.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Für eine 2×4-Matrix mit Rang 2 gibt es im Gaussendschema genau 2 Nicht-Pivotspalten. Damit lassen sich nichttriviale Lösungen mit zwei freien Parametern für das homogene System finden.

7. Für die reelle Matrix $A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$:

(a) keine Lösung

(b) eine eindeutige Lösung

√ (c) eine Lösungsmenge mit 1 freien Parameter

(d) eine Lösungsmenge mit 2 freien Parametern

Durch das Gaussverfahren

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{array} \boxed{\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{2} \end{array} \boxed{\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}} \overset{(E)_2}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

sehen wir, dass $\mathrm{Rang}(A) = 2$. Da A eine 3×3-Matrix ist, muss das homogene Gleichungssystem Lösungen mit $3 - 2 = 1$ freiem Parameter besitzen.

8. Für die reelle Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ und den reellen Vektor $b = [1, 2, 0]^\top$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

√ (a) keine Lösung

(b) eine eindeutige Lösung

(c) eine Lösungsmenge mit 1 freien Parameter

(d) eine Lösungsmenge mit 2 freien Parametern

Wir verwenden das Gaussverfahren, um das System mit rechter Seite in Zeilenstufenform zu bringen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right]$$

Es existiert keine Lösung, da die Verträglichkeitsbedingung nicht erfüllt ist, d.h. $-3/2 \neq 0$.

9. Für die reelle Matrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & a^2-2a \\ -2 & -1 & a-1 & 3 \end{bmatrix}$

gilt:

√ (a) Für $a = 0$ ist $\operatorname{Rang} B = 2$.

√ (b) $\operatorname{Rang} B > 1 \ \forall a \in \mathbb{R}$.

(c) Für $a = 1$ ist $\dim(\text{Kern } B) = 2$.

Wir bringen die Matrix mit dem Gauss-Algorithmus in Zeilenstufenform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & a^2-2a \\ -2 & -1 & a-1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & a^2-2a+1 \\ 0 & 1 & a+5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2a \end{bmatrix}$$

Daraus lesen wir die richtigen Aussagen ab:

- Für $a = 0$ ist $\operatorname{Rang} B = 2$.
- $\operatorname{Rang} B > 1 \ \forall a \in \mathbb{R}$.
- Für $a = 1$ haben wir Rang $B = 4$. Weiter haben wir nach Satz 6.1 vom Buch
$$\dim(\text{Kern } B) = n - \text{Rang } B = 4 - 4 = 0.$$

10. Für drei linear abhängige Vektoren $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eines reellen Vektorraums gibt es Skalare α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $a^{(1)} = \alpha\, a^{(2)} + \beta\, a^{(3)}$.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Linear abhängig heisst, dass es reelle λ_1, λ_2 und λ_3 gibt, sodass

$$\lambda_1 a^{(1)} + \lambda_2 a^{(2)} + \lambda_3 a^{(3)} = 0,$$

wobei nicht $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ sein darf. Im Fall $\lambda_1 = 0$ kann man nicht auflösen nach $a^{(1)}$.

11. Seien $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ Vektoren eine Vektorraums. Dann gilt:

$$a^{(1)},\ a^{(2)},\ a^{(3)} \text{ sind linear unabhängig} \Longleftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{ll} a^{(1)} \notin \operatorname{span}\left\{a^{(2)},\ a^{(3)}\right\} & \text{und} \\ a^{(2)} \notin \operatorname{span}\left\{a^{(1)},\ a^{(3)}\right\} & \text{und} \\ a^{(3)} \notin \operatorname{span}\left\{a^{(1)},\ a^{(2)}\right\} & \end{array} \right\}.$$

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Auf der rechten Seite steht nichts anderes, als dass keiner der Vektoren durch die anderen dargestellt werden kann, d. h. die Vektoren sind linear unabhängig.

12. Betrachte den Vektorraum $\mathcal{F}$ der Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Darin enthalten ist der Unterraum $\mathcal{P}_3(x) := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$ der Polynome mit Grad < 3. Es gilt:

√ (a) $\operatorname{span}\{x+1, x-1, x^2+1, x^2-1\}$ ist gleich $\mathcal{P}_3(x)$.

Ja, denn man kann die Monome $1 = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1)$, $x = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1)$ und $x^2 = x^2 + 1 - \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1)$ als Linearkombination von diesen Vektoren darstellen, und die Monome bilden eine Basis von $\mathcal{P}_3$.
Alternativ kann man die Vektoren $x+1$, etc. in der Monombasis ausdrücken, dabei ist $1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Wir erhalten somit die Vektoren

$$x+1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x-1 \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^2+1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^2-1 \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Diese vier Spaltenvektoren bilden eine Matrix mit Rang 3 (sieht man z.B. mit Gauss), spannen also $\mathbb{R}^3$ auf, und damit spannen die obigen Polynome $\mathcal{P}_3$ auf.

(b) $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1 \in \mathcal{P}_3(x)$ sind linear unabhängig.

Nein. Es gilt: $\dim(\mathcal{P}_3(x)) = 3$. Somit ist es nicht möglich, dass vier Vektoren in $\mathcal{P}_3(x)$ linear unabhängig sind.

(c) $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1 \in \mathcal{P}_3(x)$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F}$.

Der ganze Funktionenraum ist unendlich dimensional, kann also kein endliches Erzeugendensystem besitzen.

√ (d) $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1 \in \mathcal{P}_3(x)$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathcal{P}_3(x)$.

Siehe erste Antwort.

(e) Die Polynome $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1 \in \mathcal{P}_3(x)$ bilden eine Basis von $\mathcal{P}_3(x)$.

Nein. Denn die vier Polynome sind linear abhängig, da $\dim(\mathcal{P}_3(x)) = 3$ ist.