Dr. V. Gradinaru
A. Hiltebrand
D. Devaud

Online-Test 2

Einsendeschluss: Montag, der 15.12.2014 10:00 Uhr

Dieser Test ist als Angebot zu verstehen. Er dient, seriös bearbeitet, als Repetition des bisherigen Vorlesungsstoffes und als Training für die Prüfung.

---

1. Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt:

$$Ax = 0 \text{ besitzt eine nichttriviale Lösung } \iff \dim(\mathrm{Kern} A) \geq 1.$$

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Gegeben seien die Fehlergleichungen

$$Ax - c = r$$

mit

$$A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}, \mathrm{Rang} A = 2.$$

Dann haben die Normalgleichungen

$$A^T A x = A^T c$$

eine eindeutige Lösung.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Wir betrachten Fehlergleichungen $Ax - c = r$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $c = [-2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}]^T$. Aus der QR-Zerlegung von A kenne man zudem die Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Es gilt:

(a) Die Matrix R aus der QR-Zerlegung lautet $R = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Die Matrix R aus der QR-Zerlegung lautet $R = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Die Lösung des Ausgleichsproblems lautet $x = [1, 1]^T$

(d) Die Lösung des Ausgleichsproblems lautet $x = [-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 1]^T$

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ so, dass $Ax = 0$ <u>nur</u> die triviale Lösung hat. Dann gilt:

(a) $\dim(\text{Bild}A) = n$

(b) $\dim(\text{Bild}A) = n - 1$

(c) $\dim(\text{Kern}A) = 0$

(d) $\dim(\text{Kern}A) = 1$

5. Die Dimension des Kerns von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

beträgt ...

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

6. Der Kern von

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(b) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(c) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(d) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(e) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$

7. Eine Basis des Kerns von

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(e) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$

8. Das Bild von

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(b) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(c) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(d) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(e) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

9. Eine Basis des Bildes von

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(e) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

10. Ein Vektor habe bezüglich der Basis $B := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ den Koordinatenvektor $[-1, -1]^T$.
Der Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis ist ...

(a) $[\frac{1}{2}, 0]^T$

(b) $[-1, -1]^T$

(c) $[0, -2]^T$

(d) $[2, 0]^T$

(e) $[1, 1]^T$

11. Bestimmen Sie $\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_1$ (1-Norm eines Vektors).

(a) 1

(b) $\sqrt{5}$

(c) 3

(d) 2

12. Bestimmen Sie $\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_\infty$ (Maximumnorm eines Vektors).

(a) 0

(b) $\sqrt{5}$

(c) 5

(d) 2

13. Bestimmen Sie $\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_2$ (Euklidische Norm eines Vektors).

(a) 0

(b) $\sqrt{5}$

(c) 5

(d) $\sqrt{3}$

14. Für eine orthogonale Matrix A mit Inverser A^{-1} gilt:

(a) $A^{-1} = A^T$

(b) $A^{-1} = -A$

(c) Die Inverse existiert nicht notwendigerweise.

15. Für

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

gilt:

(a) A_1 ist orthogonal.

(b) A_2 ist orthogonal.

(c) Weder A_1 noch A_2 ist orthogonal.

16. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt und 2-Norm. Es sei A eine reelle $n \times n$–Matrix. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\left(x, A^T y\right) = (A\,x, y)$.

(b) Wenn gilt $A^T = A^{-1}$, dann folgt $(A\,x, A\,y) = (x, y)$ für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(c) Wenn gilt $A^T = A^{-1}$, dann folgt $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$.

(d) Es sei B eine weitere reelle $n \times n$–Matrix. Wenn gilt $A^T = A^{-1}$ und $B^T = B^{-1}$, dann hat das Produkt AB eine Inverse und es gilt $(AB)^{-1} = (AB)^T$.

17. Die Eigenwerte der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sind:

(a) $0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$

(b) $1, 2, 1$

(c) $0, 1, 3$

18. Für die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ gilt:

(a) Die Eigenwerte von A sind $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

(b) Die Eigenwerte von A sind reelle Zahlen

(c) A hat eine Basis von rellen Eigenvektoren

(d) A hat eine Basis von Eigenvektoren

(e) Das charakteristische Polynom von A hat den Grad 2

(f) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A sind reell

19. Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

(a) $x^{(1)} = [1, -2, 1]^T$

(b) $x^{(2)} = [0, 3, 2]^T$

(c) $x^{(3)} = [1, 1, 1]^T$

20. Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

haben 0 als Eigenwert?

(a) A_1.

(b) A_2.

(c) A_3.

(d) Keine.

21. Wir betrachten folgende zwei Anfangswertprobleme (AWP):

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es gilt:

(a) Die Lösung $y(t)$ des ersten AWPs hat die Eigenschaft: $||y(t)||$ wird für t genügend gross grösser als 10.

(b) Die Lösung $y(t)$ des ersten AWPs hat die Eigenschaft: $||y(t)||$ bleibt auch für t beliebig gross kleiner als 10.

(c) Die Lösung $y(t)$ des zweiten AWPs hat die Eigenschaft: $||y(t)||$ wird für t genügend gross grösser als 10.

(d) Die Lösung $y(t)$ des zweiten AWPs hat die Eigenschaft: $||y(t)||$ bleibt auch für t beliebig gross kleiner als 10.

22. Für die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ gilt:

(a) A hat drei paarweise verschiedene Eigenwerte.

(b) A hat keine Basis von Eigenvektoren.

(c) Die geometrische Vielfachheit des kleinsten Eigenwertes von A ist 2.

(d) Die algebraische Vielfachheit des grössten Eigenwertes von A ist 1.

(e) Die Eigenwerte von A und A^T sind gleich.

23. Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

sind diagonalisierbar?

(a) A_1

(b) A_2

(c) A_3

(d) Keine.

24. Sei A eine $n \times n$-Matrix. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) A halbeinfach $\Rightarrow$ A diagonalisierbar

(b) es existiert keine Eigenbasis von A $\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar

(c) es existiert eine Eigenbasis von A $\Rightarrow$ A einfach

(d) es existiert eine Eigenbasis von A $\Rightarrow$ A halbeinfach

(e) A reell, symmetrisch $\Rightarrow$ A diagonalisierbar

(f) A diagonalisierbar $\Rightarrow$ A ähnlich zu einer Diagonalmatrix

(g) A diagonalisierbar $\Rightarrow$ A orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix

(h) A reell, symmetrisch $\Rightarrow$ A orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix

(i) A orthogonal $\Rightarrow$ A orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix

25. Lösen Sie folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{aligned} -\ x+\ 2y+\ 6 &= r_1 \\ -2x+\ 7y+27 &= r_2 \\ -2x+10y+33 &= r_3 \end{aligned}$$

Um das Rechnen zu erleichtern geben wir die Matrix Q an:

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Für die Lösung des Ausgleichsproblems $(x^*, y^*)^T$ bzw. für den minimalen Residuenvektor r^* gilt:

(a) $x^* = 2$, $y^* = 3$

(b) $x^* = 2$, $y^* = -3$

(c) $x^* = -2$, $y^* = 3$

(d) $x^* = -2$, $y^* = -3$

(e) $\|r^*\| = 1$

(f) $\|r^*\| = 2$

(g) $\|r^*\| = 3$

26. Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Für alle $b \in \mathbb{R}$ sind beide Eigenwerte von A nicht negativ.

(b) Es gibt $b \in \mathbb{R}$, so dass mindestens ein Eigenwert von A negativ ist.

(c) Es gibt $b \in \mathbb{R}$, so dass beide Eigenwerte von A negativ sind.

27. Sei A eine reelle $m \times n$ Matrix. Dann ist die Blockmatrix $B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$ symmetrisch. Sei $x = [y, z]^T$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ, d. h.

$$Bx = \lambda x \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \text{ und damit } \begin{matrix} Az = \lambda y \\ A^T y = \lambda z \end{matrix}$$

(a) $-\lambda$ ist ebenfalls ein Eigenwert von B.

(b) $-\lambda$ ist im Allgemeinen kein Eigenwert von B.

(c) Für $\lambda \neq 0$ ist λ^2 ist ein Eigenwert von $A^T A$.

(d) Für $\lambda \neq 0$ ist λ^2 ist im Allgemeinen kein Eigenwert von $A^T A$.

(e) Für $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ hat B vier verschiedene Eigenwerte.

(f) Für $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ hat B zwei Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit 2.

28. Sei A eine reelle 2×2-Matrix, die orthogonal und symmetrisch ist.

(a) A hat die Form $\begin{bmatrix} \sqrt{1-b^2} & b \\ b & -\sqrt{1-b^2} \end{bmatrix}$ oder $\begin{bmatrix} -\sqrt{1-b^2} & b \\ b & \sqrt{1-b^2} \end{bmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

(b) A muss nicht einer dieser zwei Formen entsprechen.

(c) A hat nur Eigenwerte, die 1 oder -1 sind.

(d) A kann auch einen Eigenwert haben, der weder 1 noch -1 ist.

29. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

und die zugehörigen quadratischen Formen

$$f(x, y) = [x, y] A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g(x, y) = [x, y] B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

(a) f kann in der Form $f(x, y) = (ax + by)^2 + cy^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a, c > 0$ geschrieben werden.

(b) g kann in der Form $g(x, y) = (ax + by)^2 + cy^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a, c > 0$ geschrieben werden.

(c) A ist symmetrisch positiv definit.

(d) B ist symmetrisch positiv definit.

Hinweis: Quadratisch ergänzen.