Studiengang Architektur | Mathematatisches Denken | WS 2004/05

Übungsserie 1

Abgabe der (ohne Taschenrechner) gelösten Aufgaben: **Freitag 19. November 2004**

1. [6P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine Kurve γ beschrieben

$$\gamma: [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} 2t \\ t-1 \end{pmatrix}$$

   (a) Skizzieren Sie die Kurve γ und bestimmen Sie eine Gleichung von γ in der Form $y = f(x)$.

   (b) Berechnen Sie den Tangentialvektor und interpretieren Sie das Ergebnis.

   (c) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von γ, sodass die Kurve in umgekehrter Richtung und doppelt so schnell durchlaufen wird.

2. [6P.] Die Kurve γ ist durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$\gamma: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} 2\sin t \\ \sqrt{3}\sin 2t \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass γ eine geschlosse Kurve ist, die sich im Ursprung durchdringt.

   (b) Berechnen Sie den Winkel, unter dem sie sich im Ursprung durchdringt.

3. [6P.] Die Gleichung der Raumkurve γ lautet in Zylinderkoordinaten:

$$r(\varphi) := \cos\varphi \quad , \quad z(\varphi) := \cos^2\varphi \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$$

   (a) Skizzieren Sie die Projektion von γ auf die (x,y)-Ebene (Grundriss) und die Projektion von γ auf die (x,z)-Ebene (Seitenriss).

   (b) Zeigen Sie, dass für Punkte (x,y) des Grundrisses gilt: $\left(x(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2 + y(\varphi)^2 = \frac{1}{4}$. Beschreiben Sie den Sachverhalt in Worten und skizzieren Sie die Raumkurve.

4. [6P.] Die Abbildung zeigt ein **Schrauben-Minarett** (Irak, um 900). (Grundkreisradius R, Höhenunterschied H, Deckkreisradius $\approx 0,6$ Windungen)

   (a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Kurve, die ungefähr wie der abgebildete Weg aussieht. (Tipp: Betrachten Sie zuerst den Grundriss des Weges. Wie gross ist die Radiusdifferenz pro Umlauf?)

   (b) Wie lautet die Gleichung des abgebildeten Weges in Zylinderkoordinaten?

Studiengang Architektur — Mathematisches Denken — WS 2004/05

Übungsserie 1

5. [6P.] Rollt ein Kreis vom Radius R in der (x, y)-Ebene auf der x-Achse in positiver Richtung, überstreicht ein Punkt P auf dem Kreis eine Kurve γ, eine **gewöhnliche Zykloide** (Abbildung).

   (a) Wie lautet eine Parameterdarstellung von γ, wenn P zu Beginn im Ursprung O liegt?

   (b) Skizzieren Sie den ungefähren weiteren Verlauf der Kurve γ ($R = 1$ cm). ~~(Achten Sie auf Symmetrien, Spitzen und die Abstände zwischen den Spitzen.)~~

Die Zykloide spielt in der Natur und Technik eine herausragende Rolle. Sie ist diejenige Kurve, auf der ein reibungsfrei gleitender Körper *am schnellsten* von einem Punkt O zu einem schräg darunter liegenden Punkt P gelangt. Ferner ist sie diejenige Kurve, auf welcher ein reibungsfrei gleitender Körper immer *gleich lang* bis zum tiefsten Punkt hat, egal von welcher Höhe er beginnt.

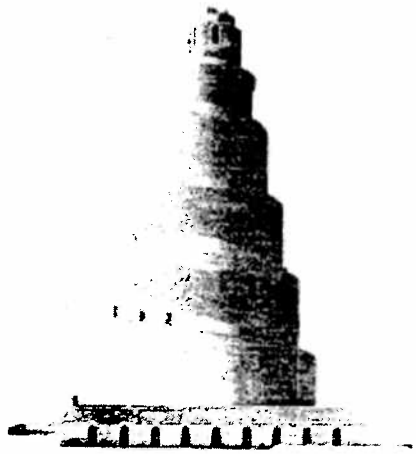
6. [6P.] Die Erde bewegt sich in $T \approx 365$ Tagen in guter Näherung gleichmässig auf einer Kreisbahn mit Radius $R \approx 1.5 \cdot 10^{11}$ m um die Sonne. Der **Mond** seinerseits bewegt sich in $\tau \approx 27$ Tagen (in derselben Kreisbahnebene im gleichen Umlaufsinn) in guter Näherung gleichmässig auf einer Kreisbahn mit Radius $\rho \approx 3.8 \cdot 10^8$ m um die Erde.

   (a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Bahnkurve des Mondes um die Sonne, wenn er zur Zeit $t = 0$ am nächsten bei der Sonne ist. (**formale** Lösung!)

   (b) Berechnen Sie zur Zeit $t = 0$ den Geschwindigkeitsvektor des Mondes.

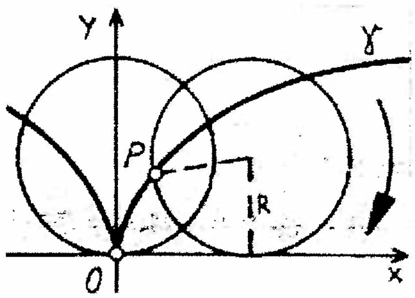
   (c) Werten Sie das Ergebnis in b) mit einem Taschenrechner aus. Bewegt sich der Mond rückwärts ($\rightsquigarrow$ Schleifen)? Skizzieren Sie den ungefähren Bahnverlauf.

5)



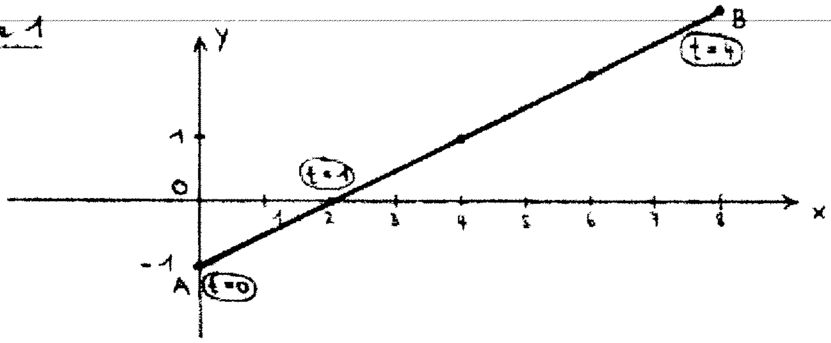
Schrauben-Minarett, Irak, um 900

6)



Übungsserie 1

(1) (a)



① $x(t) := 2t \rightsquigarrow t = \frac{x}{2}$ in ②: $\underline{y = \frac{x}{2} - 1}$

② $y(t) := t - 1$

(b) $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Der Tangentialvektor ist konstant, die Kurve γ ist ein Geradenstück.

(c) Doppelt so schnell + rückwärts $\rightsquigarrow$ Geschwindigkeitsvektor $(-2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{r}(t^*) = \vec{OB} + t^*\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t^*\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 4t^* \\ 3 - 2t^* \end{pmatrix}$ wobei $0 \leq t^* \leq 2$

---

(2) (a) Anfangspunkt $(t = 0)$: $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Endpunkt $(t = 2\pi)$: $\vec{r}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ geschlossen

Weitere Lösungen von $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? ① $2\sin t = 0 \rightsquigarrow t_1 = 0,\ \underline{t_2 = \pi},\ t_3 = 2\pi$

② $\sqrt{3}\sin 2t = 0$ $\qquad \sqrt{3}\sin(2\cdot\pi) = 0$ ✓

auch $\vec{r}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Durchdringung (Abbildung!)

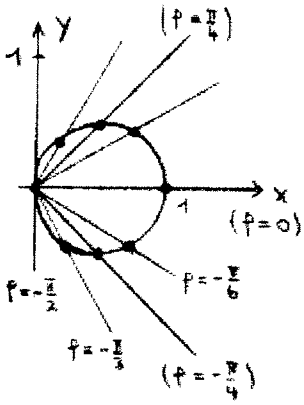
(b) $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ mit $x'(t) = (2\sin t)' = 2\cos t$, $y'(t) = (\sqrt{3}\sin 2t)' = \sqrt{3}\cdot 2\cos(2t)$

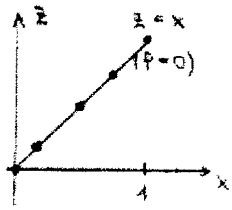
$\vec{r}\,'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \vec{r}\,'(2\pi)$, $\vec{r}\,'(\pi) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Zwischenwinkel α: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{-4 + 4\cdot 3}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{16}} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2} \rightsquigarrow \underline{\alpha = 60°}$

---

(3) (a) $\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \\ \cos^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi \\ \cos^2\varphi \end{pmatrix}$





(b) $x(\varphi) = \cos^2\varphi$, $y(\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi$

$\left(\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 + (\cos\varphi\sin\varphi)^2$

$= \cos^4\varphi - \cos^2\varphi + \frac{1}{4} + \cos^2\varphi\overbrace{\sin^2\varphi}^{1-\cos^2\varphi}$

$= \cos^4\varphi - \cos^2\varphi + \frac{1}{4} + \cos^2\varphi - \cos^4\varphi = \frac{1}{4}$ $\rightsquigarrow$ Der Grundriss ist ein Kreis, die Raumkurve ein "Zylinderschnitt"

Abbildung!

④ Wahl des Koordinatensystems: z-Achse ≙ Turmachse, Anfangspunkt $(R,0,0)$, Endpunkt $(0,0,H)$

Grundriss: Parameter t: Drehwinkel, 6 Windungen $\rightarrow 0 \le t \le 6\cdot 2\pi$, $\frac{R}{6}$ pro 2π: $\frac{R}{6\cdot 2\pi}$

$$x(t) = \left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)\cos t \quad , \quad y(t) = \left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)\sin t$$

Räumlich: Ganghöhe: $\frac{H}{6}$ bzw. "pro 2π": $\frac{H}{6\cdot 2\pi}$

$$z(t) = \frac{H}{12\pi}t$$

$$\gamma: [0, 12\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} \left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)\cos t \\ \left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)\sin t \\ \frac{H}{12\pi}\cdot t \end{pmatrix}$$

(b) Gleichung in Zylinderkoordinaten: $r(\varphi) = R - \frac{R}{12\pi}\varphi$, $z(\varphi) = \frac{H}{12\pi}\varphi$ $\quad (0 \le \varphi \le 12\pi)$

---

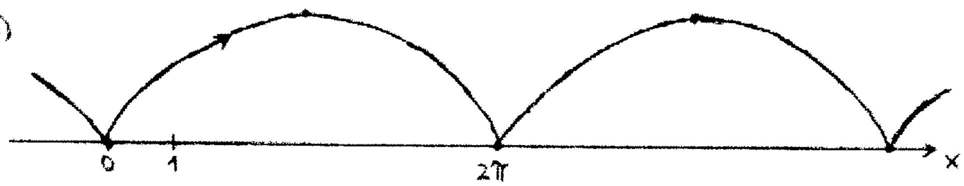
⑤ (a) Parameter t: Wälzwinkel,

$\vec{OM} = (Rt, R)$, $\quad \vec{MP} = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ -R\cos t \end{pmatrix}$ $\qquad$ Abbildung!

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP} = \begin{pmatrix} Rt \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R\sin t \\ -R\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rt - R\sin t \\ R - R\cos t \end{pmatrix}$$

$$\gamma: \left]-\infty, \infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} Rt - R\sin t \\ R - R\cos t \end{pmatrix}$$

(b)



---

⑥ Wahl des Koordinatensystems: Ursprung in der Sonne O, x-Achse durch Anfangspunkt der Erde E

Parameter t: Zeit (in Tagen), Umlaufsinn: Gegenuhrzeigersinn

(a) Erde: 2π in der Zeit $T \rightsquigarrow \frac{2\pi}{T}$ $\qquad$ Mond: 2π in der Zeit $\tau \rightsquigarrow \frac{2\pi}{\tau}$

$\vec{OE} = \begin{pmatrix} R\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) \\ R\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{EM} = \begin{pmatrix} -\varrho\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \\ -\varrho\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \end{pmatrix}$ $\qquad$ Abbildung!

$$\vec{OP} = \vec{OE} + \vec{EM}, \text{ also } \gamma: \left]-\infty,\infty\right[\rightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \varrho\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \\ R\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \varrho\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \end{pmatrix}$$

(b) $$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} R\cdot\frac{2\pi}{T}\left(-\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right) - \varrho\frac{2\pi}{\tau}\left(-\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)\right) \\ R\cdot\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \varrho\frac{2\pi}{\tau}\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \end{pmatrix} \qquad \vec{r}\,'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ R\frac{2\pi}{T} - \varrho\frac{2\pi}{\tau} \end{pmatrix} = \vec{v}(0)$$

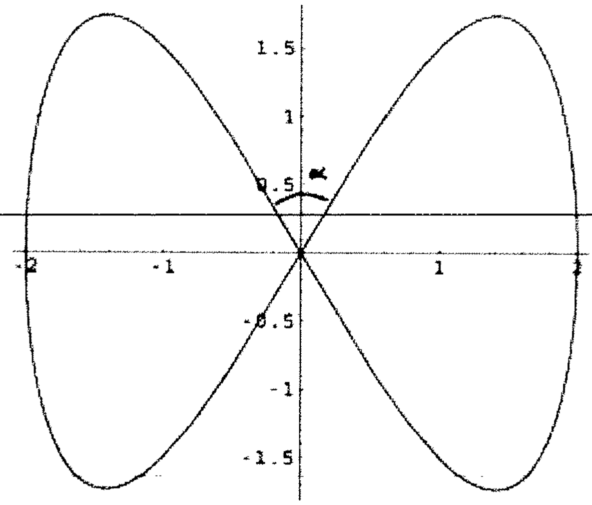
(c) $v_y(0) = R\frac{2\pi}{T} - \varrho\frac{2\pi}{\tau} > 0$, Mond bewegt sich nicht rückwärts (keine Schleifen)

Abbildung

2) In[13]:=

```
ParametricPlot[{2*Sin[t], Sqrt[3]*Sin[2 t]},
 {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ \sqrt{3} \sin 2t \end{pmatrix}$$

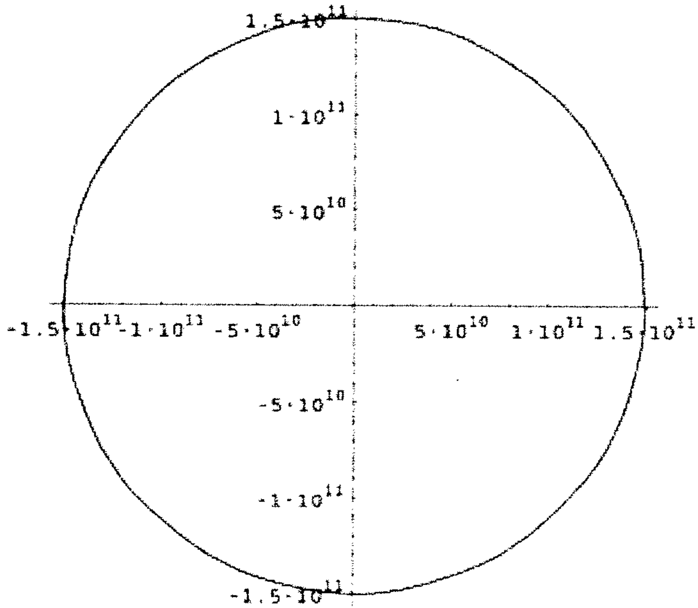


Out[13]= - Graphics -

```
T = 365; R = 1.5*10^11; tau = 27; rho = 3.8*10^8
```

b) In[28]:=

```
ParametricPlot[{R*Cos[2 Pi*t / T] - rho*Cos[2 Pi*t / tau],
  R*Sin[2 Pi*t / T] - rho*Sin[2 Pi*t / tau]}, {t, 0, 365}, AspectRatio -> Automatic]
```



Out[28]= - Graphics -