Studiengang Architektur | Mathematisches Denken | SS 2005

Übungsserie 3

Abgabe der (ohne TR) gelösten Aufgaben: **Donnerstag 28. April 2005**

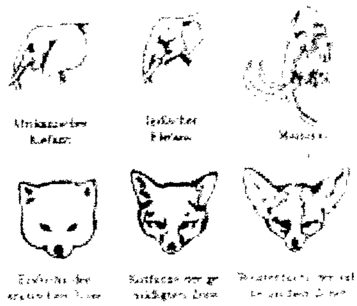
1. [6P.] Die Flächenmitten eines Würfels bilden die Ecken eines regulären **Oktaeders**.
   (a) Zeichnen Sie das Schrägbild eines Würfels mit einbeschriebenem Oktaeder.
   (b) Berechnen Sie die Oberfläche S und das Volumen V eines regulären Oktaeders mit der Kantenlänge a.

2. [6P.] Verbindet man alle Punkte eines Vielecks mit einem Punkt S ausserhalb der Vieleckebene, so entsteht eine **Pyramide**. Die Vieleckfläche heisst *Grundfläche*.
   (a) Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat eine Pyramide mit einer n-eckigen Grundfläche? Gilt die Eulersche Polyederformel?
   (b) Skizzieren Sie eine Pyramide, die *nicht konvex* ist und eine andere Pyramide, die *kombinatorisch regulär* aber *nicht regulär* ist.
   (c) Unter welcher Voraussetzung an die Grundfläche ist die Pyramide *konvex*?

3. [6P.] Zeigen Sie mithilfe der **Eulerschen Polyederformel**: Ein konvexes Polyeder bestehend aus lauter Vierecken und bestehend aus lauter Ecken, in denen
   (a) stets drei Kanten zusammenstossen, ist vom Typ eines Würfels.
   (b) stets vier Kanten zusammenstossen, ist nicht möglich.
   (c) drei oder vier Kanten zusammenstossen hat stets genau 8 dreikantige Ecken. Skizzieren Sie einen solchen Körper. Tipp: Zwei aneinander gelegte Würfel 'verzerren'.

4. [6P.] Das **reguläre Tetraeder** lässt sich in einen Würfel einbetten, so dass die Tetraederkanten mit sechs Flächendiagonalen des Würfels zusammenfallen.
   (a) Zeichnen Sie das Schrägbild eines Würfels mit einbeschriebenem Tetraeder.
   (b) Zeichnen Sie den *Grundriss* des Tetraeders (Grundrissebene = Würfelstandebene). Eine Diagonalfläche des Würfels (aufgespannt durch 2 gegenüberliegende Flächendiagonalen) schneidet das Tetraeder: Skizzieren Sie die *Schnittfigur* und berechnen Sie alle drei Seitenlängen aus der Kantenlänge a des Tetraeders.
   (c) Berechnen Sie den Umkugel- und Inkugelradius eines regulären Tetraeders mit der Kantenlänge a. (Tipp: Ähnliche Dreiecke in der Schnittfigur aus (b) verwenden.)

5. [6P.] **Skalenverhalten:**
   Kleine Tiere haben eine relativ grosse Oberfläche und müssen deshalb relativ viel Nahrung zu sich nehmen, um ihre Körpertemperatur aufrechtzuerhalten. Grössere Tiere haben eine relativ kleine Körperoberfläche und können deshalb längere Zeit ohne Nahrung auskommen. Sie haben jedoch mehr Schwierigkeiten, die von ihnen beim Stoffwechsel produzierte Wärme abzuleiten. Die grossen Ohren des Afrikanischen Elefanten sind regelrechte Wärmeabstrahler, während die Ohren des Indischen Elefanten auffallend kleiner sind und jene des Mammuts besonders klein waren.



(a) Ein freistehendes Bürogebäude mit Flachdach und rechteckigem Grundriss wird massstäblich von 10'000 m^3 Volumeninhalt auf 13'310 m^3 vergrössert. Um wie viel % nimmt dadurch die Wärmeabstrahlung des Gebäudes zu?
Annahme: Die Wärmeabstrahlung ist proportional zur Gebäudeoberfläche.

(b) Welchen Prozentwert müssen Sie auf dem Fotokopiergerät einstellen, wenn der Flächeninhalt einer Graphik um 44 % grösser werden soll?

6. [6P.] *Darf eine Plastik (oder ein Lebewesen) massstäblich vergrössert werden oder muss man damit rechnen, dass die Plastik (oder das Lebewesen) im Boden einsinkt?*
Eine **Plastik** bestehe aus 5 aufeinander gestellten Würfeln und habe insgesamt eine Höhe von $H = 1$ m.

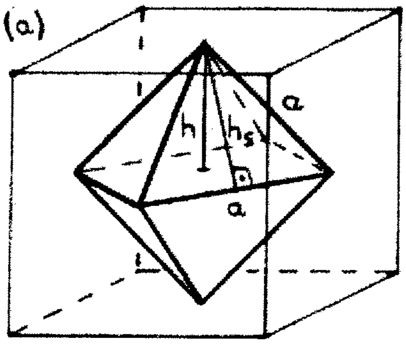
(a) Welche Grundfläche hat die Plastik, wenn sie massstäblich um den Faktor 100 auf die Höhe der Freiheitsstatue vergrössert wird?

(b) Welche Grundfläche müsste die vergrösserte Plastik haben, damit der Bodendruck (Druck = Kraft / Fläche) unverändert bleibt?

(c) Eine Vergrösserung der Höhe H um den Faktor λ bedeutet unter Berücksichtigung eines gleichbleibenden Bodendrucks eine Vergrösserung der Grundfläche um den Faktor λ^p. Wie gross ist p?

Bemerkungen. Die Freiheitsstatue am Hafeneingang von New York ist 46 m hoch, die Sockelhöhe beträgt 47 m. Der zulässige Bodendruck für z. B. felsigen, unberührten Boden beträgt 0.3 kN/cm^2.

1 (a)



(b) $S = 8\cdot F_\Delta$ mit $F_\Delta = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_s = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}$

$= \underline{\underline{2\sqrt{3}\,a^2}}$ $\qquad = \frac{1}{2}a\cdot\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$V = 2\cdot V_{Pyr}$ mit $V_{Pyr} = \frac{1}{3}G\cdot h = \frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}$

$= 2\cdot\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{3}a^3}}$ Quadrat! 45°-90°-Dreieck

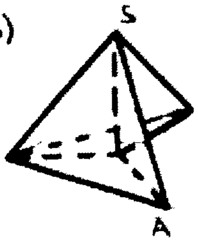
$a^2 = h^2+h^2 = 2h^2$

$a = \sqrt{2}\cdot h$

---

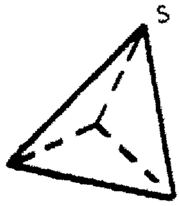
2 (a) $e = n+1$, $k = 2n$, $f = n+1$ $\qquad e-k+f = n+1-2n+n+1 = 2$ Formel gilt für alle Pyramiden

(b)



nicht konvex

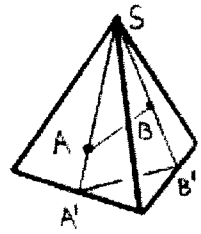
z.B. AB gehört nicht zum Körper



Kombinatorisch regulär

lauter Dreiecke

lauter dreikantige Ecken



(c) Die Vieleckfläche (Grundfläche) muss konvex sein! [Sind A, B zwei Punkte des Körpers, A', B' die Schnittpunkte von (SA) und (SB) mit der Grundfläche, so gehören SA', SB' zum Körper und A'B' zur Grundfläche (da konvex). Also gehört die ganze Ebene/Gerade (A'B'S) zum Körper und auch AB.]

---

3 (a) $3e = 2k$, $4f = 2k$ $\qquad 2 = e-k+f = e-\frac{3}{2}e+\frac{3}{4}e = \frac{1}{4}e$, $\underline{\underline{e=8}}$, $k=12$, $f=6$ Typ Würfel

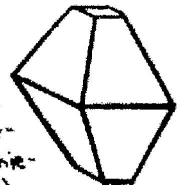
(b) $4e = 2k$, $4f = 2k$ $\qquad 2 = e-k+f = e-2e+e = 0$ unmöglich

(c) e_3, e_4: Anzahl Ecken mit 3 bzw. 4 Kanten,

$e_3+e_4 = e$, $3e_3+4e_4 = 2k$, $4f = 2k$

$2 = e-k+f = e_3+e_4-\frac{3}{2}e_3-2e_4+\frac{3}{4}e_3+e_4 = \frac{1}{4}e_3 \rightarrow \underline{\underline{e_3 = 8}}$

Bsp.: (ausbaubar, Würfel umschieben...)

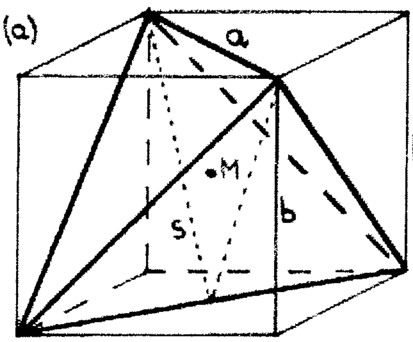


$e_3 = 8$

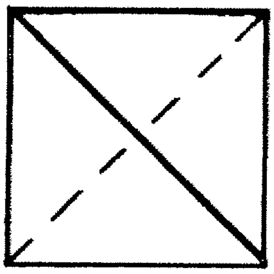
$e_4 = 4$

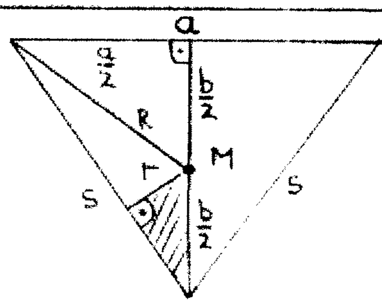
---

4 (a)



(b)





$a^2 = b^2+b^2 = 2b^2$, $a = \sqrt{2}\,b$, $\underline{b = \frac{a}{\sqrt{2}}}$; $s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2 = \frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}$

$\underline{s = \sqrt{\frac{3}{4}}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$

(c) $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{a^2}{2} = \frac{3}{8}a^2$, $\underline{\underline{R = \sqrt{\frac{3}{8}}a}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$

$\frac{r}{b/2} = \frac{a/2}{s}$ (Ähnlichkeit) $\quad r = \frac{1}{4}\cdot ab\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{4}a\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}\,a} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{6}}a}} = \frac{\sqrt{6}}{12}a$

(5) (a) Volumen, Oberfläche: V_1, S_1 (kleines Gebäude); V_2, S_2 (grosses Gebäude)

λ Längenfaktor $\rightsquigarrow$ $V_2 = \lambda^3 V_1$, $S_2 = \lambda^2 S_1$

$\lambda^3 = \frac{V_2}{V_1} = 1.331 = 1.1^3$, $\lambda^2 = \frac{S_2}{S_1} = 1.1^2 = 1.21$, $S_2 = 1.21\, S_1$

Die Gebäudeoberfläche und damit die Wärmeabstrahlung nimmt um 21% zu.

(b) λ Längenfaktor, Fläche S_1 (klein) S_2 (gross) $\rightarrow$ $S_2 = 1.44\, S_1 = \lambda^2 S_1$

$\lambda^2 = 1.44 \rightarrow \lambda = 1.2$ Einstellung 120%

---

(6) (a) Würfelkantenlänge $a = \frac{H}{5} = 0.2\,m$; gross: $a' = \frac{H'}{5} = \frac{\lambda H}{5} = \lambda a = 20\,m$, $(a')^2 = 400\,m^2$

(b) Volumen: $V' = (a')^2 H' = \lambda^2 a^2 \cdot \lambda H = \lambda^3 V$ Gewichtskraft: $F_G' = \rho V' g = \rho \lambda^3 V g = \lambda^3 F_G$

Druck $= \frac{F_G}{a^2} = \frac{F_G'}{G'}$ $\rightsquigarrow$ $G' = \frac{F_G'}{F_G} \cdot a^2 = \lambda^3 a^2 = 40000\,m^2 = 100 \cdot 400\,m^2$

(c) $G' = \lambda^3 a^2 = \lambda^3 G$ also $p = 3$ (d.h. Seitenlänge $= \lambda^{3/2} \cdot a$)