Studiengang Architektur | Mathematisches Denken | SS 2005

Zusatzserie 5

Für das Testat zur Vorlesung Mathematisches Denken I und II sind **110 Punkte** nötig.
Abgabe der (ohne TR) gelösten Aufgaben: **Donnerstag 9. Juni 2005**

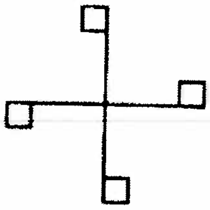
1. [6P.] Symm(Ω_1) bzw. Symm(Ω_2) bezeichnet die Menge aller **Symmetrietransformationen** der Figur Ω_1 bzw. der Figur Ω_2 (Abbildung).

   (a) Ermitteln Sie Symm(Ω_1) und Symm(Ω_2). (Führen Sie geeignete Bezeichnungen ein.)

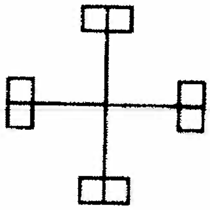
   (b) Stellen Sie von Symm(Ω_1) die zugehörige Gruppentafel auf.

   (c) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Gruppentafel alle Lösungen X (Symmetrietransformationen von Ω_1) der folgenden Gleichungen:

   $R_{Z,90°} \circ X = R_{Z,270°}$, $X \circ X = R_{Z,180°}$, $R_{Z,180°} \circ X \circ X = R_{Z,270°}$

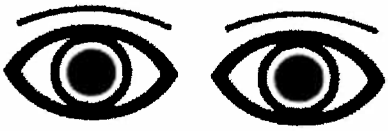


Figur Ω_1

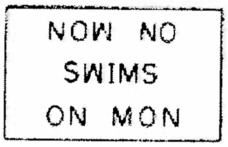


Figur Ω_2

2. [6P.] Geben Sie von den abgebildeten Figuren die zugehörige **Symmetriegruppe** an! (Bezeichnungen: Diedergruppen $\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}_2$, $\mathbb{D}_3$, ..., zyklische Gruppen $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$, $\mathbb{C}_3$, ..., vgl. Definition 2.9 'Notizen zur Vorlesung', S. 73)



Figur Ω_1

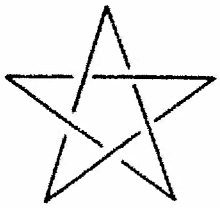


Figur Ω_2

Figur Ω_3

Figur Ω_4

Figur Ω_5



Figur Ω_6

Beschreiben Sie eine Transformation, welche die Figur Ω_1 mit sich selbst zur Deckung bringt, aber **keine Kongruenztransformation** ist.

Zusatzserie 5

3. [6P.] **Additive Gruppe der reellen Zahlen**: Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe bildet.

   In der Definition einer Gruppe bezeichnet M eine Menge und $\circ$ eine beliebige Verknüpfung, welche auf M erklärt ist. Bei $\circ$ muss es sich keineswegs um eine 'Multiplikation' handeln, sondern $\circ$ kann auch eine 'Addition' bedeuten, im obigen Fall ist '$\circ$'='+' (Addition von Zahlen). Natürlich ist dann 1 nicht mehr das Neutralelement und $\frac{1}{t}$ nicht mehr das inverse Element 't^{-1}' zu t. ('t^{-1}' ist nur eine Bezeichnung und bedeutet nur im Fall der Zahlen-Multiplikation den Kehrwert von t.)

4. [6P.] Die Menge der **Symmetrietransformationen** $\mathrm{Symm}(\Omega)$ einer ebenen Figur Ω sei gegeben durch $\mathrm{Symm}(\Omega) = \{I, X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

   (a) Vervollständigen Sie die abgebildete Tafel, so dass eine Gruppe entsteht.

$\circ$	I	X_1	X_2	X_3	X_4
I					
X_1		X_2	X_3		
X_2		X_3			
X_3					
X_4					

   (b) Skizzieren Sie eine ebene Figur, welche die obige Symmetriegruppe besitzt. Führen Sie geeignete Bezeichnungen ein und geben Sie mögliche 'Lösungen' von X_1, X_2, X_3 und X_4 an.

5. [6P.] **Rotation und Geradenspiegelung**: Das Rotationszentrum Z liegt auf der Spiegelungsgeraden g, für den Drehwinkel α gilt $0 < \alpha < 360°$.

   (a) Untersuchen Sie die Verkettung $R_{Z,\alpha} \circ S_g$ der Geradenspiegelung S_g und der Rotation $R_{Z,\alpha}$! Anleitung: Mit Hilfe von Satz 2.9 (vgl. Notizen zur Vorlesung) bestimmen Sie den 'Typ' der Kongruenztransformation und mit Hilfe der Bilder $P' = S_g(P)$ und $P'' = R_{Z,\alpha}(P')$ eines gewählten Punktes P die Lage des bestimmenden Elements.

   (b) Untersuchen Sie die Spezialfälle $\alpha = 0°$ und $\alpha = 180°$ sowie die Verkettung $S_g \circ R_{Z,\alpha}$ ('zuerst S_g, dann $R_{Z,\alpha}$').

① (a) $\mathrm{Symm}(\Omega_1) = \{ I, R_{Z,90^\circ}, R_{Z,180^\circ}, R_{Z,270^\circ} \}$

$\mathrm{Symm}(\Omega_2) = \{ I, R_{Z,90^\circ}, R_{Z,180^\circ}, R_{Z,270^\circ}, S_a, S_b, S_c, S_d \}$

(b)

$\circ$	I	$R_{Z,90^\circ}$	$R_{Z,180^\circ}$	$R_{Z,270^\circ}$
I	I	$R_{Z,90^\circ}$	$R_{Z,180^\circ}$	$R_{Z,270^\circ}$
$R_{Z,90^\circ}$	$R_{Z,90^\circ}$	$R_{Z,180^\circ}$	$R_{Z,270^\circ}$	I
$R_{Z,180^\circ}$	$R_{Z,180^\circ}$	$R_{Z,270^\circ}$	I	$R_{Z,90^\circ}$
$R_{Z,270^\circ}$	$R_{Z,270^\circ}$	I	$R_{Z,90^\circ}$	$R_{Z,180^\circ}$

(c) 2. Zeile, 3. Spalte: $R_{Z,90^\circ} \circ \underline{\underline{R_{Z,180^\circ}}} = R_{Z,270^\circ}$

1 Lösung: $X = R_{Z,180^\circ}$

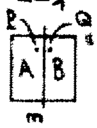
Auf Diagonale: $R_{Z,90^\circ} \circ R_{Z,90^\circ} = R_{Z,180^\circ}$, $X_1 = \underline{\underline{R_{Z,90^\circ}}}$

$R_{Z,270^\circ} \circ R_{Z,270^\circ} = R_{Z,180^\circ}$, $X_2 = \underline{\underline{R_{Z,270^\circ}}}$

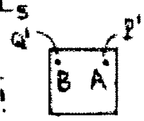
Setze: $X \circ X = Y$, 3. Zeile, 2. Spalte: $R_{Z,180^\circ} \circ R_{Z,90^\circ} = R_{Z,270^\circ}$

$Y = X \circ X = R_{Z,90^\circ}$ aber nicht auf Diagonale: $\underline{\underline{\text{keine}}}$ Lösung

② $\Omega_1: \mathbb{D}_1$ $\Omega_2: \mathbb{C}_2$ $\Omega_3: \mathbb{D}_2$ $\Omega_4: \mathbb{C}_1$ $\Omega_5: \mathbb{D}_8$ $\Omega_6: \mathbb{C}_5$



"Auftrennen von Ω_1 entlang m und horizontales Verschieben von A nach B und von B nach A." Diese Zuordnung der Punkte ist keine Kongruenztransf. Der Abstand von P und Q bleibt nicht unverändert!



③ (G1) Für beliebige $s, t \in \mathbb{R}$ gilt stets: $s + t \in \mathbb{R}$

(G2) Für beliebige $r, s, t \in \mathbb{R}$ gilt stets: $(r+s)+t = r+(s+t)$

(G3) Für die Zahl $0 \in \mathbb{R}$ gilt: $t + 0 = 0 + t = t$, alle $t \in \mathbb{R}$. 0 ist das (additive) Neutralelement

(G4) Zu $t \in \mathbb{R}$ gibt es $-t =: "t^{-1}" \in \mathbb{R}$ mit $t + (-t) = (-t) + t = 0$ (Neutralelement)
Das inverse Element zu t ist die Gegenzahl $-t$.

(KG) Für beliebige $s, t \in \mathbb{R}$ gilt stets: $s+t = t+s$

④ (a) Gemäss Tafel: $X_1 \circ X_1 = X_2$, $X_1 \circ X_1 \circ X_1 = X_1 \circ (X_1 \circ X_1) = X_1 \circ X_2 = X_3$

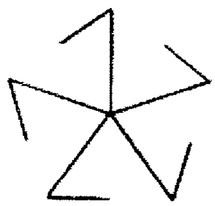
(b) Ansatz: $X_1 = R_{Z,72^\circ}$, $X_2 = R_{Z,144^\circ}$, $X_3 = R_{Z,216^\circ}$, $X_4 = R_{Z,288^\circ}$

Gruppentafel (nur Indizes, $0 \hat{=} I$)

$\circ$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

(Alle Gruppenaxiome sind erfüllt: (G1), (G3), (G4) aus der Tafel ersichtlich, (G2) für Kongruenztrsf. stets erfüllt)

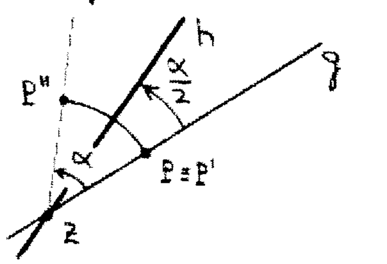
Mögliches Ω:



⑤ (a) Z ist Fixpunkt von $R_{Z,\alpha} \circ S_g$ (Kongruenztransformation!) da Fixpunkt von S_g und von $R_{Z,\alpha}$

Nach Satz 2.9 ist ist $\underbrace{R_{Z,\alpha} \circ S_g}_{\text{gegensinnig!}}$ entweder die Identität ($\not\!\!\downarrow$ Orientierung, I gleichsinnig)
eine Rotation ($\not\!\!\downarrow$ " , R ")
oder eine Geradenspiegelung an einer Geraden h durch Z

$R_{Z,\alpha} \circ S_g$ ist also eine Geradenspiegelung S_h, und zwar geht h durch Z und der Winkel von g nach h ist $\alpha/2$, wie der Punkt P zeigt.



(b) $\alpha = 0^\circ$, d.h. $R_{Z,\alpha} = I$ also $R_{Z,\alpha} \circ S_g = I \circ S_g = S_g$

$\alpha = 180^\circ$, d.h. $\alpha/2 = 90^\circ$, also $h \perp g$

$S_g \circ R_{Z,\alpha} = S_h$, h durch Z, der Winkel von g nach h ist $-\frac{\alpha}{2}$