Studiengang Architektur | Mathematisches Denken | WS 2005/06

Übungsserie 1

Abgabe der (ohne Taschenrechner) gelösten Aufgaben: **Freitag 25. November 2005**

1. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Kurve** γ beschrieben

$$\gamma :]-\infty, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} t-2 \\ 0.5\,t^2 - 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Skizzieren Sie die Kurve γ in ein ebenes Koordinatensystem und berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von γ mit den Koordinatenachsen.

   (b) Welchen t-Wert hat der 'unterste' Punkt von γ? Welche Koordinaten hat er?

   (c) Bestimmen Sie eine Gleichung von γ in der Form $y = f(x)$.

2. Ermitteln Sie eine möglichst einfache **Parameterdarstellung**

   (a) der **Ellipse** e mit den Halbachsen 2 und 1, die parallel zur (x, y)-Ebene verläuft und deren Mittelpunkt der Punkt $(0, 0, 1)$ ist.

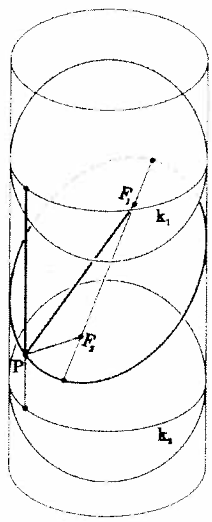
   (b) des **Kreises** k mit Radius 4, der parallel zur (x, z)-Ebene verläuft und dessen Mittelpunkt der Punkt $(1, 2, 3)$ ist.

3. Die Abbildung (Figur 1) zeigt ein **Schrauben-Minarett** (Irak, um 900).
(Grundkreisradius R, Höhenunterschied H, Deckkreisradius ≈ 0, 6 Windungen)

   (a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Kurve, die ungefähr wie der abgebildete Weg aussieht. (Tipp: Betrachten Sie zuerst den Grundriss des Weges und gehen Sie von einer konstanten Radiusdifferenz pro Umlauf aus.)

   (b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Kurve mit dem z-Wert (Höhe über der Standebene) des Kurvenpunkts als Parameter.

Figur 1



Figur 2 (Aufgabe 4)

Bitte wenden!

4. Ein gerader Kreiszylinder wird unter dem Winkel α von einer Ebene E geschnitten. (α bezeichnet den Winkel zwischen E und der Zylinderachse, es sei $0 < \alpha \leq 90°$.)

   (a) Beweisen Sie mithilfe Figur 2: Die ebene Schnittkurve ist eine **Ellipse**.

   (b) Berechnen Sie die Halbachsen der Ellipse in Abhängigkeit des Winkels α.

   Anleitung: Dem Zylinder lassen sich zwei Kugeln einbeschreiben, die den Zylinder in einem Kreis und die Schnittebene E in einem Punkt F_1 bzw. F_2 berühren. (Diese raffinierte Idee stammt von dem belgischen Mathematiker und Baumeister PIERRE GERMINAL DANDELIN (1794 bis 1847)).

5. Der Kreis k_2 mit Radius r rollt auf der Aussenseite des Kreises k_1 mit Radius $2r$ und Mittelpunkt $O = (0,0)$ im Gegenuhrzeigersinn ab (Figur 3). Dabei überstreicht der feste Punkt P auf k_2 vom Punkt $A = (2r, 0)$ ausgehend eine **Epizykloide** γ.

   (a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Epizykloide γ.

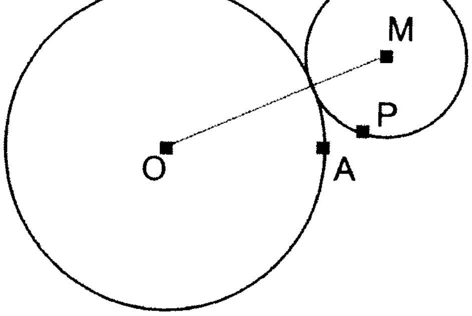
   (b) Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf der Epizykloide γ für $r = 1$ cm. (Achten Sie auf Symmetrien, Spitzen und die relative Anordnung der Spitzen.)

   Die oben beschriebene Bewegung kann auch als Überlagerung zweier ebener Drehungen (mit proportionalen Winkelgeschwindigkeiten) aufgefasst werden. Solche Bewegungen heissen *Trochoidenbewegungen*. Trochoidenbewegungen lassen sich z. B. bei Planeten beobachten. Der Mond 'kreist' in 27 Tagen um die Erde, während die Erde dabei in 365 Tagen um die Sonne 'kreist'.

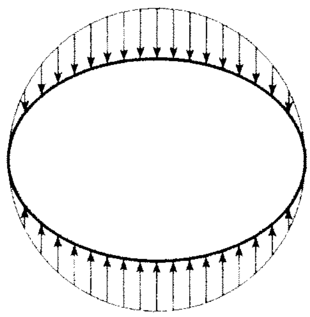
6. **Stauchung** eines Kreises:

   (a) In einem Kreis vom Radius r wird ein Durchmesser gezeichnet und jeder Kreispunkt senkrecht zum Durchmesser vom Durchmesser aus mit dem Faktor $\lambda = \frac{7}{10}$ gestreckt (Figur 4). Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und zeigen Sie, dass dadurch eine **Ellipse** entsteht.

   (b) Die senkrecht am Himmel stehende Sonne beleuchtet mit parallelem Licht ein kreisförmiges **Dachfenster** in einer gegenüber der Horizontalen um $\alpha = 45°$ geneigten Dachfläche. Welche Form hat der Umriss des Lichtflecks auf dem horizontalen Dachboden? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe einer Skizze.

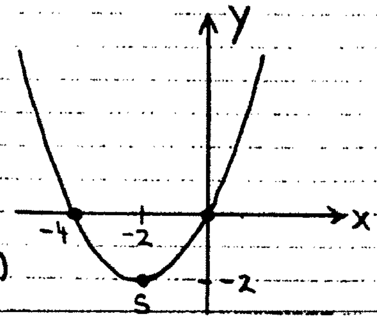


Figur 3 (Aufgabe 5)



Figur 4 (Aufgabe 6)

Übungsserie 1 WS 05/06



① (a) $\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}t-2\\0.5t^2-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow t_0=2$, in $y(t)$: $y_0 = 0.5\cdot 4 - 2 = 0 \rightsquigarrow (0,0)$

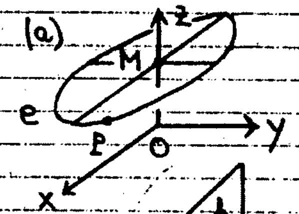
$\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}t-2\\0.5t^2-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ $0{,}5t^2=2$, $t^2=4$, $t_1=2$, $t_2=-2$ in $x(t)$: $x_1 = 2-2 = 0 \rightsquigarrow (0,0)$, $x_2 = -2-2 = -4 \rightsquigarrow (-4,0)$

(b) $y(t) = \underbrace{0.5t^2}_{\geq 0} - 2 \geq -2$ und $= -2$ nur für $t=0$, in $x(t)$: $x_S = -2$, $y(t)$: $y_S = -2$ $\rightsquigarrow S = (-2,-2)$

(c) $x(t) = t-2 \rightsquigarrow t = x+2$ in $y(t) = 0.5t^2 - 2 = 0.5(x+2)^2 - 2 = 0.5(x^2+4x+4) - 2$

$y = 0.5x^2 + 2x$ (Parabel mit Scheitel S)

② (a)

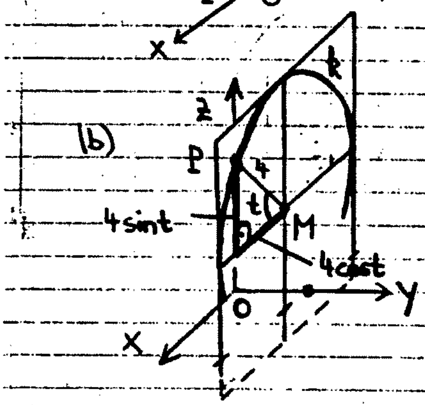


Ellipse bez M: $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}a\cos t\\b\sin t\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cos t\\\sin t\\0\end{pmatrix}$

bez O: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\cos t\\\sin t\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cos t\\\sin t\\1\end{pmatrix}$

$e: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix}2\cos t\\\sin t\\1\end{pmatrix}$

(b)



Kreis bez M: $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}4\cos t\\0\\4\sin t\end{pmatrix}$, bez O: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\cos t\\0\\4\sin t\end{pmatrix}$

$k: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix}4\cos t+1\\2\\4\sin t+3\end{pmatrix}$

③ Wahl des KS: z-Achse $\hat{=}$ Turmachse, Anfangspunkt $(R,0,0)$, Endpunkt $(0,0,H)$

(a) Grundriss: "Verjüngende" Spirale beginnend mit Radius $r=R$, Parameter $t \hat{=}$ Drehwinkel, in 6 Windungen ($\hat{=} 6\cdot 2\pi$) Abnahme um R: $\frac{R}{12\pi}$ Radiusdifferenz pro Winkeleinheit

$x(t) = \underbrace{\left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)}_{\text{Radius}} \cos t$, $y(t) = \underbrace{\left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)}_{\text{Radius}} \sin t$ $(0 \leq t \leq 6\cdot 2\pi)$

Höhe: In 6 Windungen ($\hat{=} 6\cdot 2\pi$) Höhe H $\rightsquigarrow \frac{H}{12\pi}$ Höhendifferenz pro Winkeleinheit

$$z(t) = \frac{H}{12\pi}t$$

$$\gamma: [0, 12\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix}\left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)\cos t\\\left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)\sin t\\H/12\pi \cdot t\end{pmatrix}$$

(b) $z(t) = \frac{H}{12\pi}t \rightarrow t = \frac{12\pi}{H}z$

$$\gamma: [0, H] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ z \longmapsto \vec{r}(z) = \begin{pmatrix}\left(R - \frac{R}{H}z\right)\cos\left(\frac{12\pi}{H}z\right)\\\left(R - \frac{R}{H}z\right)\sin\left(\frac{12\pi}{H}z\right)\\z\end{pmatrix}$$

④ (a) Sei P ein beliebiger Punkt der Schnittkurve. Die (vertikale) Mantellinie auf dem Zylinder durch P schneidet die Berührkreise k_1 und k_2 in den Punkten B_1 und B_2. Sie ist Tangente beider Kugeln. PF_1 und PB_1 sind Tangentenabschnitte von P an die obere Kugel und sind deshalb gleich lang: $|PF_1| = |PB_1|$ ①

Analog gilt für die Tangentenabschnitte: $|PF_2| = |PB_2|$ ②

$$|PF_1| + |PF_2| \overset{①,②}{=} |PB_1| + |PB_2| = |B_1B_2| = \text{konst.}$$

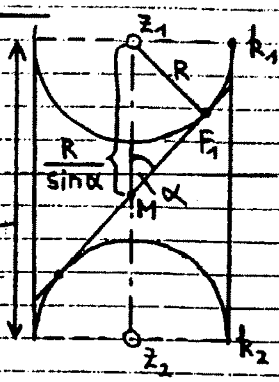
Alle Punkte P der Schnittkurve haben die konstante Entfernungssumme $|B_1B_2|$ zu F_1, F_2 → Ellipse!

*

$$\sin\alpha = \frac{R}{|Z_1M|}$$

$$|Z_1M| = \frac{R}{\sin\alpha}$$

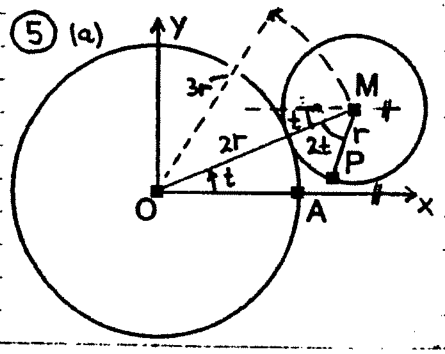
$|B_1B_2|$



(b) Kl. Halbachse $b = R$ (Zylinderradius)

$$\text{gr. Halbachse } a \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}|B_1B_2| \overset{*}{=} |Z_1M| \overset{\text{Figur } *}{=} \frac{R}{\sin\alpha}$$

⑤ (a)



Parameter $t \mathrel{\hat=}$ Drehwinkel von M bez. O

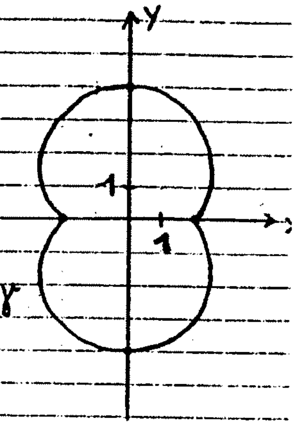
$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 3r\cos t \\ 3r\sin t \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Abrollbedingung: gleiche Längen entsprechender Bogenstücke

$$t \cdot 2r \overset{\text{soll}}{=} p \cdot r \rightsquigarrow p = 2t$$

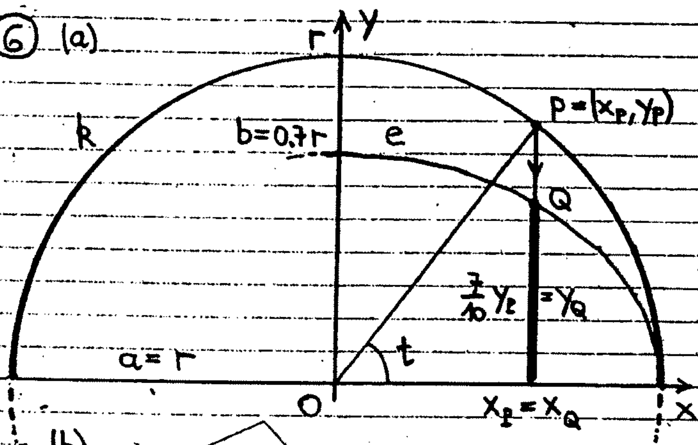
$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -r\cos(3t) \\ -r\sin(3t) \end{pmatrix}$$

(b)



$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 3r\cos t - r\cos 3t \\ 3r\sin t - r\sin 3t \end{pmatrix}$$

⑥ (a)



Für P auf k gilt: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$

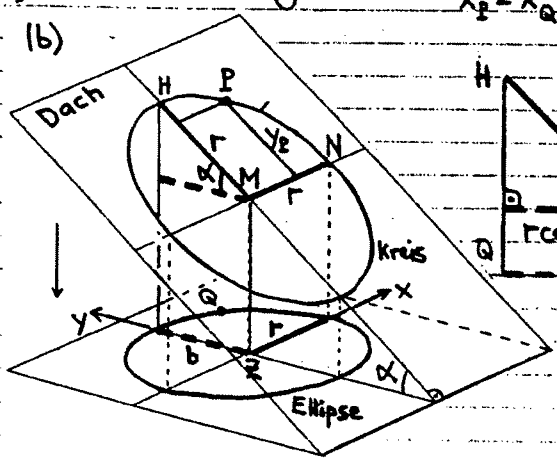
Stauchung: $y_Q = \frac{7}{10} y_P$

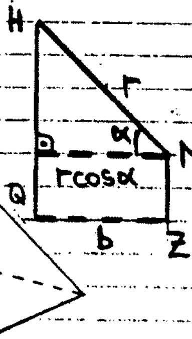
Für Q auf e gilt: $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ 0{,}7r\sin t \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Ellipse mit $a = r$ und $b = 0{,}7r$

(Bedeutung von Parameter t in e: t ist der Drehwinkel in der Parameterdrst. des gestauchten Kreises)

(b)





$|MN|$ und Linien parallel zu MN werden nicht verkürzt $\rightsquigarrow x_Q = x_P$, $a = r$

$|HM|$ und Linien parallel zu HM (Falllinien) werden verkürzt (gestaucht) $\rightsquigarrow y_Q = y_P \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} y_P$

$$b = r \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$

Lichtfleck ist ein mit dem Faktor $\cos\alpha$ gestauchter Kreis $\rightsquigarrow$ Ellipse mit $a = r$, $b = r\cos\alpha$