Übungsserie 2

Abgabe der (z.T. mit Taschenrechner) gelösten Aufgaben: **Freitag 13. Januar 2006**

1. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Raumkurve** γ beschrieben

$$\gamma :]-\infty,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} 1.4\cos t \\ 0.7\sin t \\ t \end{pmatrix}$$

   (a) Skizzieren Sie die Kurve γ in ein räumliches Koordinatensystem und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes P von γ mit der (x, y)-Ebene.

   (b) Welchen Neigungswinkel bezüglich der (x, y)-Ebene hat die Kurve γ in P?

   (c) Besitzt die Kurve γ, z. B. aufgefasst als Handlauf einer Treppe, überall die gleiche Steilheit? (Begründen Sie kurz Ihre Antwort.)

2. Die **Kurve** γ (Figur 1) wird durch die folgende Parameterdarstellung beschrieben:

$$\gamma :]-\infty,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Kurve γ sich im Ursprung durchdringt.

   (b) Weisen Sie nach, dass sie sich unter einem rechten Winkel schneidet.

   (c) Berechnen Sie die Abszisse (den x-Wert) des höchsten Punkts der Schleife.

3. Gegeben sind die Punkte $A(-5|3|3)$, $B(1|5|8)$ und $C(7|11|9)$.

   (a) Berechnen Sie $\vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AC}$, $\vec{v} = \vec{AB} \times \vec{BC}$, $\vec{w} = \vec{AC} \times \vec{BC}$

   (b) Zeigen Sie, dass $\vec{u} \cdot \vec{AB} = 0$ und $\vec{u} \cdot \vec{AC} = 0$ gilt.

   (c) Berechnen Sie die Längen der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ und interpretieren Sie das Ergebnis **geometrisch**.

4. (a) Gegeben ist die Gerade g durch die Punkte A und B sowie der Punkt P nicht auf g. Zeigen Sie mithilfe einer Skizze, dass für den **Abstand** d des Punktes P von g gilt:

$$d = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AP}|}{|\vec{AB}|}$$

   (b) Der Ortsvektor $\vec{OP}$ des allgemeinen Punktes $P = (x, y, z)$ schliesse mit dem festen Vektor $\vec{OA} = (1; 1; 1)$ den Winkel 30° ein. Stellen Sie eine Gleichung in x, y und z auf, die diesen Sachverhalt beschreibt. Wo liegen alle Punkte P, deren Ortsvektor $\vec{OP}$ mit $\vec{OA}$ den konstanten Winkel 30° einschliesst?

Bitte wenden!

Studiengang Architektur — Mathematisches Denken — WS 2005/06

Übungsserie 2

5. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S:\ (s,t) \longmapsto \vec{r} := \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1-s-t \end{pmatrix} \qquad (-\infty < s,t < \infty)$$

   (a) Skizzieren Sie die s-Linie zu $t=0$ und die t-Linie zu $s=0$ in ein räumliches Koordinatensystem. Was für Kurven sind die s-Linien bzw. die t-Linien?

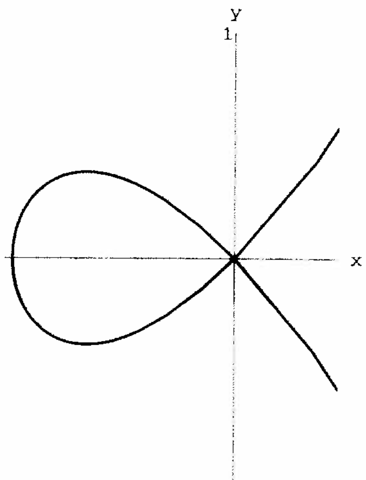
   (b) Skizzieren Sie nun die Fläche S in das räumliche Koordinatensystem durch ein angedeutetes Netz von s- und t-Linien.

   (c) Bestimmen Sie eine andere Parameterdarstellung von S.

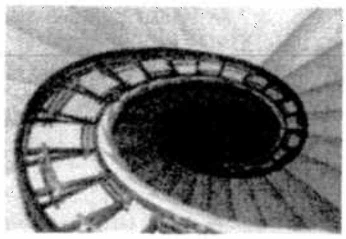
6. Laut Architekt E. Brantschen wurden bei dem eigenwilligen **Dach der Kirche** von St. Gallen Winkeln (siehe Figur 1.25 in den 'Notizen zur Vorlesung') in Längsrichtung des Daches *Parabeln* verwendet, in Querrichtung *Geraden*. In der Folge gehen wir von der vereinfachenden Annahme aus, dass der Grundriss des Daches ein Quadrat mit Seitenlänge 1 ist und der 'Öffnungsfaktor' der Parabeln 0.2 beträgt. (Der Parameter a in der Gleichung der Parabel $y = ax^2$ heisst *Öffnungsfaktor* der Parabel.)

   (a) Führen Sie ein geeignetes räumliches Koordinatensystem ein und skizzieren Sie (unter Berücksichtigung der vereinfachenden Annahme) die Dachfläche durch ein angedeutetes Netz von Koordinatenlinien.

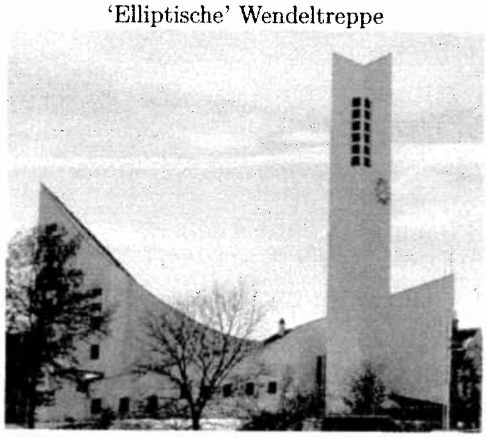
   (b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Dachfläche.



Figur 1 (Aufgabe 2)



'Elliptische' Wendeltreppe

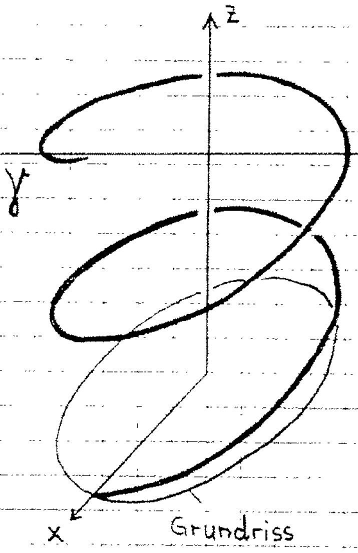


Kirche St. Gallen Winkeln

Bitte wenden!

Übungsserie 2   WS 05/06

① (a) Der "Grundriss" von γ ist eine Ellipse mit Mittelpunkt in $(0,0,0)$ und Halbachsen $a = 1.4$ (auf der x-Achse), $b = 0.7$ (auf der y-Achse)



Für $P = (x, y, 0)$ gilt: $\left.\begin{array}{l} x(t) = 1.4\cos t \longrightarrow x(0) = 1.4 \\ y(t) = 0.7 \sin t \longrightarrow y(0) = 0 \\ 0 \overset{\text{soll}}{=} t \end{array}\right\} \underline{\underline{P = (1.4, 0, 0)}}$

(b) Tangentialvektor an γ in P (t-Wert: $t = 0$)

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -1.4 \sin t \\ 0.7 \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}\,'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{Vertikalrichtung: } \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Neigungswinkel von γ bzw. $\vec{r}\,'(0)$ bezüglich Vertikale:

$$\cos\alpha_0 = \frac{\vec{r}\,'(0) \cdot \vec{e}_3}{|\vec{r}\,'(0)| \cdot |\vec{e}_3|} = \frac{0 + 0 + 1}{\sqrt{0.7^2 + 1^2} \cdot 1} = 0.8192 \rightsquigarrow \alpha_0 = 34.99°$$

Neigungswinkel bez (x,y)-Ebene: $90° - \alpha_0 = \underline{\underline{55.01°}}$

(c) Nein, α ändert fortwährend mit t: $\cos\alpha(t) = \dfrac{1}{\sqrt{(-1.4\sin t)^2 + (0.7\cos t)^2}}$, z.B. $t = \pi/2 \rightsquigarrow \alpha = 44.42°$

(t entspricht übrigens auch nicht dem Drehwinkel)

---

② (a) t-Werte von Kurvenpunkten im Ursprung: $\left.\begin{array}{l} 0 \overset{\text{soll}}{=} x(t) = t^2 - 1 \\ 0 \overset{\text{soll}}{=} y(t) = t^3 - t \end{array}\right\} \rightsquigarrow \underline{t = \pm 1}$

$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r}(-1)$, also eine Selbstdurchdringung in $(0,0)$

(b) Tangentialvektor: $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix}$, für $t = -1$: $\vec{r}\,'(-1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t = 1$: $\vec{r}\,'(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\vec{r}\,'(-1)}_{\neq \vec{0}} \cdot \underbrace{\vec{r}\,'(1)}_{\neq \vec{0}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0 \longrightarrow \text{Schnittwinkel ist } \underline{90°}$$

(c) Im "höchsten" Punkt der Schleife ist $\vec{r}\,'(t)$ horizontal: $0 \overset{\text{soll}}{=} 3t^2 - 1 = y'(t)$

$$\rightsquigarrow t = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}} \qquad x\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = \left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^2 - 1 = \tfrac{1}{3} - 1 = \underline{\underline{-\tfrac{2}{3}}}$$

---

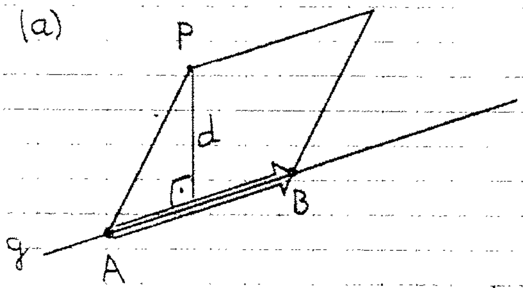
③ $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-5) \\ 5-3 \\ 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7-(-5) \\ 11-3 \\ 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 11-5 \\ 9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-40 \\ 60-36 \\ 48-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-30 \\ 30-6 \\ 36-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}$$

(b) $$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -168 + 48 + 120 = 0, \quad \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = -336 + 192 + 144 = 0$$

(c) $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = \sqrt{(-28)^2 + 24^2 + 24^2} = \underline{\underline{44}}$ Flächeninhalt des von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannten Parallelogramms

④ (a)



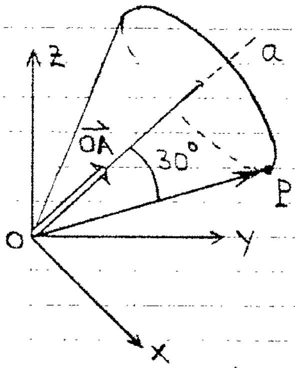
Flächeninhalt des von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$ aufgespannten Parallelogramms

$F_{\square} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|$ (mit Vektorprodukt)

$F_{\square} = d \cdot |\overrightarrow{AB}|$ (mit Grundlinie · Höhe)

$$\rightsquigarrow \quad d \cdot |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}| \,, \quad d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

(b)



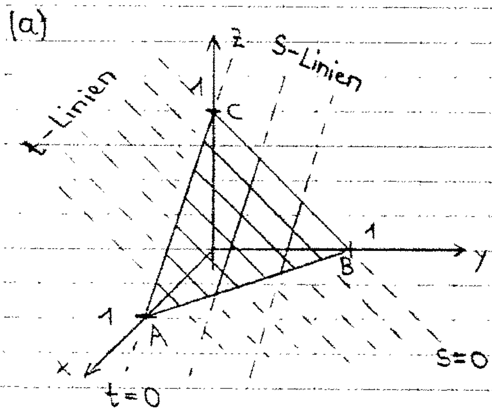
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\cos(30^\circ)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \overset{\text{soll}}{=} \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OA}|} = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = x+y+z$$

Die Punkte P liegen auf einem (unbegrenzten) Kegel (mit Spitze O, Achse a und halbem Öffnungswinkel 30°)

⑤ (a)



s-Linie zu $t=0$: $s \longmapsto \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 1-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

t-Linie zu $s=0$: $t \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

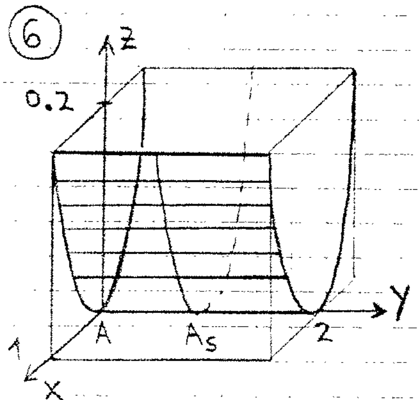
s-Linien und t-Linien sind Geraden

(b) S ist eine Ebene durch A, B, C

(c) $S: \; (s^*, t^*) \longmapsto \vec{r}(s^*, t^*) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OA}} + s^* \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AB}} + t^* \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AC}} = \begin{pmatrix} 1-s^*-t^* \\ s^* \\ t^* \end{pmatrix}$

$(-\infty < s^*, t^* < \infty)$

⑥



t-Linien: Parabeln

s-Linien: Geraden

(b) Um die 'erste' Parabel zu zeichnen ist ein Parameter t nötig:

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0.2t^2 \end{pmatrix} \quad \text{denn: } z = 0.2x^2$$

Um eine 'spätere' Parabel zu zeichnen, muss berücksichtigt werden, dass der Scheitel A sich verschoben hat: $A_s = (0, s, 0)$, s Verschiebungsparameter

Für einen Flächenpunkt mit Ortsvektor $\vec{r}$ gilt:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA_s} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0.2t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0.2t^2 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung der Dachfläche: $(s,t) \longmapsto \vec{r}(s,t) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0.2t^2 \end{pmatrix}$ $\quad (-1 \leq t \leq 1, \; 0 \leq s \leq 2)$