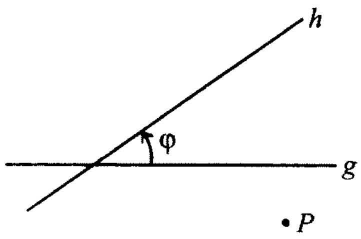
Zusatzserie 5

Für das Testat zur Vorlesung Mathematisches Denken I und II sind **7 Punkte** nötig.
Abgabe der (ohne TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 23. Juni 2006**

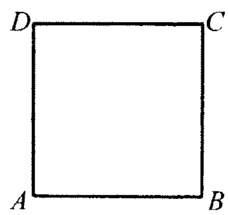
1. **Verkettung von Geradenspiegelungen**: Zwei Geraden g und h schneiden sich unter dem Winkel φ ($0 < \varphi < 180°$). Orientierung des Winkels: Im Gegenuhrzeigersinn 'von g nach h' (Figur 1).

   (a) Untersuchen Sie die Verkettung $S_h \circ S_g$ der Geradenspiegelungen S_g und S_h!
   Anleitung: Mit Hilfe von Satz 2.9 (vgl. Notizen zur Vorlesung) bestimmen Sie den 'Typ' der Kongruenztransformation und mit Hilfe der Bilder $P' = S_g(P)$ und $P'' = S_h(P')$ eines gewählten Punktes P die entsprechende kennzeichnende Grösse ausgedrückt mit φ.

   (b) Untersuchen Sie die Spezialfälle $\varphi = 0°$ und $\varphi = 90°$ sowie die Verkettung $S_g \circ S_h$ ('zuerst S_h, dann S_g').



Figur 1 (Aufgabe 1)



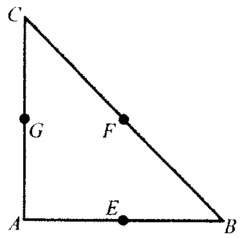
Figur 2 (Aufgabe 2)

2. Symmetrien des **Quadrates** (des regulären Vierecks)

   (a) Ermitteln Sie alle Kongruenztransformationen, welche das Quadrat (Figur 2) mit sich selbst zur Deckung bringen. (Führen Sie geeignete Bezeichnungen ein.)

   (b) Stellen Sie die zugehörige Verknüpfungstafel auf bzw. zur Vereinfachung nur den 'rechten, oberen Teil der Tafel bis und mit der Diagonale'.

3. Das **Dreieck** ABC (Figur 3) ist gleichschenklig, rechtwinklig und hat die Seitenmitten E, F, G. Untersuchen Sie die **Verkettung** $T = R_{G,180°} \circ R_{F,180°} \circ R_{E,180°}$ der drei Halbdrehungen $R_{E,180°}$, $R_{F,180°}$ und $R_{G,180°}$.
   Anleitung: Begründen Sie die Anwendbarkeit von Satz 2.9 (vgl. Notizen zur Vorlesung) und bestimmen Sie damit den 'Typ' der Kongruenztransformation und mit Hilfe der Bilder eines gewählten Punktes die entsprechende kennzeichnende Grösse.



Figur 3 (Aufgabe 3)

Studiengang Architektur | Mathematisches Denken | SS 2006

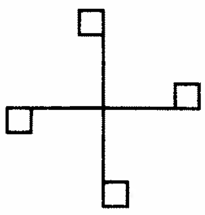
Zusatzserie 5

4. Symm(Ω_1) bzw. Symm(Ω_2) bezeichnet die Menge aller **Symmetrietransformationen** der Figur Ω_1 bzw. der Figur Ω_2 (Abbildung).

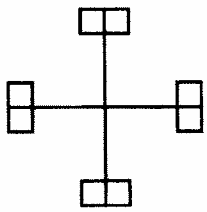
   (a) Ermitteln Sie Symm(Ω_1) und Symm(Ω_2). (Führen Sie geeignete Bezeichnungen ein.)

   (b) Stellen Sie von Symm(Ω_1) die zugehörige Gruppentafel auf.

   (c) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Gruppentafel alle Lösungen X (Symmetrietransformationen von Ω_1) der folgenden Gleichungen:
   $R_{Z,90^\circ} \circ X = R_{Z,270^\circ}$, $\quad X \circ X = R_{Z,180^\circ}$, $\quad R_{Z,180^\circ} \circ X \circ X = R_{Z,270^\circ}$

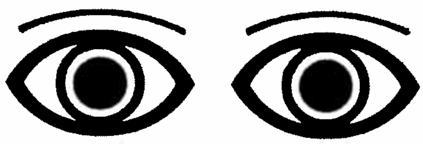


Figur Ω_1

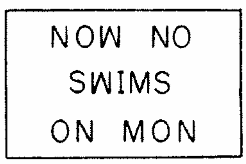


Figur Ω_2

5. Geben Sie von den abgebildeten Figuren die zugehörige **Symmetriegruppe** an! (Bezeichnungen: Diedergruppen $\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}_2$, $\mathbb{D}_3$, ..., zyklische Gruppen $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$, $\mathbb{C}_3$, ..., vgl. Definition 2.9 'Notizen zur Vorlesung')



Figur Ω_1

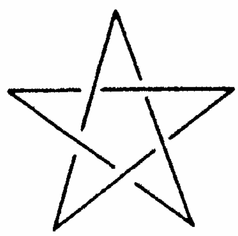


Figur Ω_2

Figur Ω_3

Figur Ω_4

Figur Ω_5



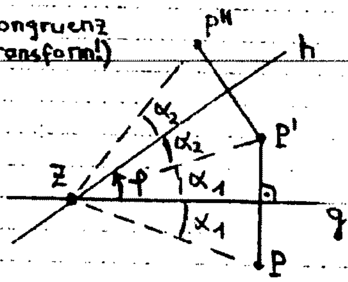
Figur Ω_6

Beschreiben Sie eine Transformation, welche die Figur Ω_1 mit sich selbst zur Deckung bringt, aber **keine Kongruenztransformation** ist.

Bitte wenden!

Zusatzserie 5, SS06

(1) (a) Der Schnittpunkt Z von g und h ist Fixpunkt von $S_h \circ S_g$ (Kongruenztransform!) (da Fixpunkt von S_g und von S_h) ~~Nach Satz 2.9 ist~~
$S_h \circ S_g$ entweder eine Rotation um Z, eine Geradenspiegelung oder die Identität. $S_h \circ S_g$ ist nicht die Identität, da $P \neq Z$ kein Fixpunkt ist (P wird um Z um den Winkel $\alpha = 2\varphi$ gedreht)
$S_h \circ S_g$ ist keine einzige Geradenspiegelung, da eine alleine die Orientierung ändert, zwei nacheinander jedoch nicht.
$S_h \circ S_g$ ist also eine Rotation um Z, und zwar mit $\alpha = 2\varphi$ wie der Punkt P zeigt.

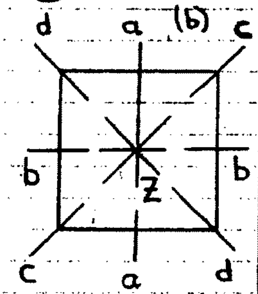


$2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\varphi$

(b) $\varphi = 0°$, d.h. $g \equiv h$ also $S_h \circ S_g = S_g \circ S_g = I$ (Identität)
$\varphi = 90°$, d.h. $\alpha = 2\varphi = 180°$ $S_h \circ S_g = R_{Z,180°}$ (Halbdrehung / Punktspiegelung)
$S_g \circ S_h = R_{Z,\alpha}$ mit $\alpha = -2\varphi$ (Drehung im Uhrzeigersinn um $|2\varphi|$: $P'' \to P' \to P$)

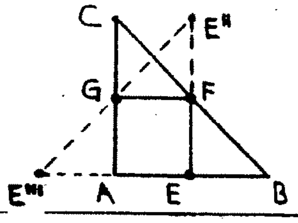
(2) (a) I; $R_{Z,90°}$; $R_{Z,180°}$; $R_{Z,270°}$; S_a; S_b; S_c; S_d

(b)



$\circ$	I	$R_{Z,90°}$	$R_{Z,180°}$	$R_{Z,270°}$	S_a	S_b	S_c	S_d
I	I	$R_{Z,90°}$	$R_{Z,180°}$	$R_{Z,270°}$	S_a	S_b	S_c	S_d
$R_{Z,90°}$		$R_{Z,180°}$	$R_{Z,270°}$	I	S_d	S_c	S_a	S_b
$R_{Z,180°}$			I	$R_{Z,90°}$	S_b	S_a	S_d	S_c
$R_{Z,270°}$				$R_{Z,180°}$	S_c	S_d	S_b	S_a
S_a					I	$R_{Z,180°}$	$R_{Z,90°}$	$R_{Z,270°}$
S_b						I	$R_{Z,270°}$	$R_{Z,90°}$
S_c							I	$R_{Z,180°}$
S_d								I

(3) A ist Fixpunkt von T ($A \xrightarrow{R_E} B \xrightarrow{R_F} C \xrightarrow{R_G} A$)
(T ist Kongruenztransformation, da Verkettung von solchen)
T ist gleichsinnig (da Hintereinanderausführung von 3 Rotationen)
Nach Satz 2.9 ist T eine Rotation $R_{A,\alpha}$ um A oder die Identität
Wähle Punkt E: $E \xrightarrow{R_E} E \xrightarrow{R_F} E'' \xrightarrow{R_G} E''' \rightsquigarrow$ $\underline{\underline{T = R_{A,180°}}}$



④ (a) $\mathrm{Symm}(\Omega_1) = \{ I, R_{z,90°}, R_{z,180°}, R_{z,270°} \}$

$\mathrm{Symm}(\Omega_2) = \{ I, R_{z,90°}, R_{z,180°}, R_{z,270°}, S_a, S_b, S_c, S_d \}$

(b)

$\circ$	I	$R_{z,90°}$	$R_{z,180°}$	$R_{z,270°}$
I	I	$R_{z,90°}$	$R_{z,180°}$	$R_{z,270°}$
$R_{z,90°}$	$R_{z,90°}$	$R_{z,180°}$	$R_{z,270°}$	I
$R_{z,180°}$	$R_{z,180°}$	$R_{z,270°}$	I	$R_{z,90°}$
$R_{z,270°}$	$R_{z,270°}$	I	$R_{z,90°}$	$R_{z,180°}$

(c) 2. Zeile, 3. Spalte: $R_{z,90°} \circ \underline{R_{z,180°}} = R_{z,270°}$

1 Lösung: $X = R_{z,180°}$

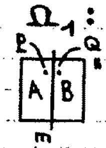
Auf Diagonale: $R_{z,90°} \circ R_{z,90°} = R_{z,180°}$, $X_1 = \underline{R_{z,90°}}$

$R_{z,270°} \circ R_{z,270°} = R_{z,180°}$, $X_2 = \underline{R_{z,270°}}$

Setze: $X \circ X = Y$, 3. Zeile, 2. Spalte: $R_{z,180°} \circ \underline{R_{z,90°}} = R_{z,270°}$

$Y = X \circ X = R_{z,90°}$ aber nicht auf Diagonale: **Keine** Lösung

⑤ $\Omega_1 : \mathbb{D}_1$ $\Omega_2 : \mathbb{C}_2$ $\Omega_3 : \mathbb{D}_2$ $\Omega_4 : \mathbb{C}_1$ $\Omega_5 : \mathbb{D}_8$ $\Omega_6 : \mathbb{C}_5$



"Auftrennen von Ω_1 entlang m und horizontales Verschieben von A nach B und von B nach A."

Diese Zuordnung der Punkte ist keine Kongruenztransf. Der Abstand von P und Q bleibt nicht unverändert!