Ferienserie

Abgabe der (z.T. mit Taschenrechner) gelösten Aufgaben: **Freitag 23. März 2007**

1. Die folgende Parameterdarstellung beschreibt die Fläche S (**Konoid**) in Figur 1:

$$S:\ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi\,,\ 0 \le t \le 1)$$

   (a) Ist S eine Regelfläche? Ist S abwickelbar? (Kurze Begründungen ohne Rechnung)

   (b) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.

   (c) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}(\varphi_0, t_0)$?

2. Die **Erde** ist keine exakte Kugel sondern ein *Rotationsellipsoid*: Die grosse Halbachse a (Äquatorradius) übertrifft die kleine Halbachse b (Polarradius) um mehrere Kilometer; bezüglich der Erdachse besteht Rotationssymmetrie.

   (a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Erdoberfläche mit den Parametern φ und t.

   (b) Was für Kurven sind die φ-Linien bzw. die t-Linien?

   (c) Leiten Sie die Koordinatengleichung des Rotationsellipsoids her.
   (Tipp: Beachten Sie die Vorgehensweise im Beispiel 1.3 *Ellipse*)

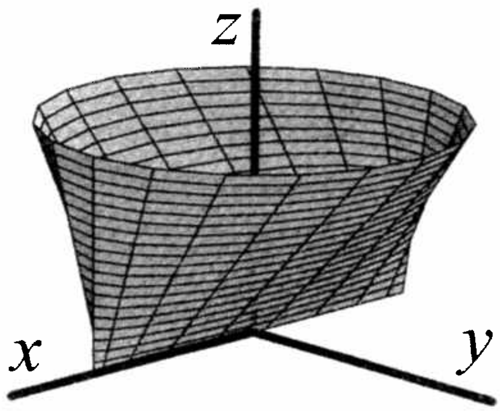
3. Der abgebildete gerade '**Ellipsenkegel**' entsteht, wenn man eine Gerade, die durch den Ursprung O (Kegelspitze) geht, an der Ellipse e entlangführt (Figur 2).

   (a) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Ellipse e, die parallel zur (x, y)-Ebene liegt, die Halbachsen $\sqrt{3}$ und 1 und den Mittelpunkt $(0, 0, 1)$ besitzt.

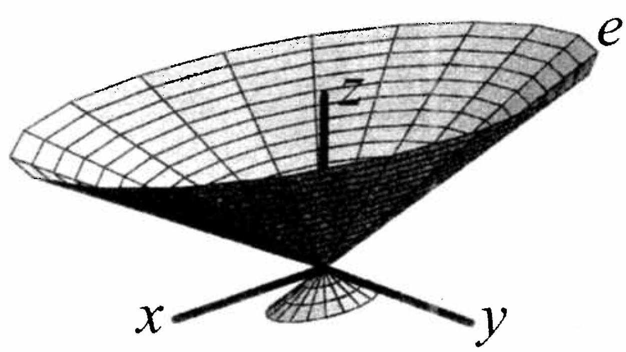
   (b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung dieser (Doppel-) Kegelfläche.

   (c) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche her.

   (d) Die winkelhalbierende Ebene der positiven x- und y-Achse schneidet den Ellipsenkegel in zwei Mantellinien. Welchen Winkel schliessen diese Mantellinien ein?



Figur 1 (Aufgabe 1)



Figur 2 (Aufgabe 3)

1 **(a)** S entsteht durch Bewegung einer Geraden entlang dem Kreis k und der Strecke s auf der x-Achse
$\rightsquigarrow$ Schar gerader Linien: Regelfläche

Die Tangentialebene entlang der markierten t-Linie ist nicht konstant, sie "dreht" sich. nicht abwickelbar

(b) $x = \cos\varphi\ ,\ y = t\sin\varphi\ ,\ z = t \qquad x^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \ \rightsquigarrow\ x^2 + \frac{y^2}{z^2} = 1$

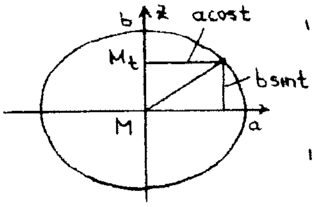
$$\underline{\underline{x^2 z^2 + y^2 = z^2}}$$

(c) Idee: $\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t}$

$$\vec{s} = \vec{r}_{t_0}{}'(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ t_0\cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{t} = \vec{r}_{\varphi_0}{}'(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi_0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} t_0\cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \\ -\sin^2\varphi_0 \end{pmatrix}}}$$

(Bem: $\vec{n}$ "dreht" entlang allgemeiner t-Linie $\rightsquigarrow$ nicht abwickelbar)

2 **(a)** Wahl des Koordinatensystems: Ursprung in der Erdmitte, z-Achse auf der Erdachse



'Erster' Kreis mit Mittelpunkt $M(0|0|0)$ und Radius $R = a$:

$$\begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi)$$

'Späterer' Kreis mit Mittelpunkt $M_t(0|0|b\sin t)$ und Radius $R = a\cos t$

$$\begin{pmatrix} a\cos t\cos\varphi \\ a\cos t\sin\varphi \\ b\sin t \end{pmatrix} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$$

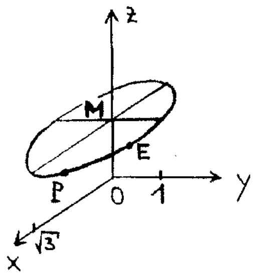
Rotations Ellipsoid: $\quad (\varphi, t) \longmapsto \vec{r} = \begin{pmatrix} a\cos t\cos\varphi \\ a\cos t\sin\varphi \\ b\sin t \end{pmatrix} \qquad \left(0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

(b) t-Linien: (Halb)-Ellipsen mit Halbachsen a, b (Meridiane)
φ-Linien: Breitenkreise um die z-Achse

(c) $x = a\cos t\cos\varphi$, $y = a\cos t\sin\varphi$, $z = b\sin t$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \cos^2 t\cos^2\varphi + \cos^2 t\sin^2\varphi + \sin^2 t$$
$$= (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\cos^2 t + \sin^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

3 (a) Ellipse bez M: $\quad \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ 1\cdot\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$



bez O: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

(b) Gerade durch O und $(\sqrt{3}\cos t, \sin t, 1)$:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}s\cdot\cos t \\ s\cdot\sin t \\ s \end{pmatrix}$$

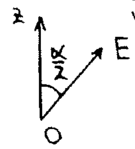
Kegelfläche: $(s, t) \longmapsto \vec{r}(s,t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \sqrt{3}s\cos t \\ s\sin t \\ s \end{pmatrix}}} \qquad (-\infty < s < \infty,\ 0 \le t \le 2\pi)$

(c) $x = \sqrt{3}s\cdot\cos t\ ,\ y = s\cdot\sin t\ ,\ z = s$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = s^2\cdot\cos^2 t + s^2\cdot\sin^2 t = s^2\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} = z^2 \ \rightsquigarrow\ \underline{\underline{\frac{x^2}{3} + y^2 = z^2}}$$

(d) Punkt E auf e mit $x = y$: $\ \sqrt{3}\cos t = \sin t \ \rightsquigarrow\ t = \frac{\pi}{3} \quad \left(\sqrt{3} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t\right)$ t ist nicht der Drehwinkel!

$E = \left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 1\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ gleich! $\qquad$ Kegelachse: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overrightarrow{OE}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{|\overrightarrow{OE}|\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{4}}\cdot 1} \approx 0.6325 \ \rightsquigarrow\ \underline{\underline{\alpha = 101.537°}}$$