Zusatzserie 6

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 21. Mai 2010** in der Vorlesung

1. Wir betrachten die **Buchstaben**: A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z.

   (a) Ordnen Sie alle ihrer jeweiligen Symmetriegruppe $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ zu.

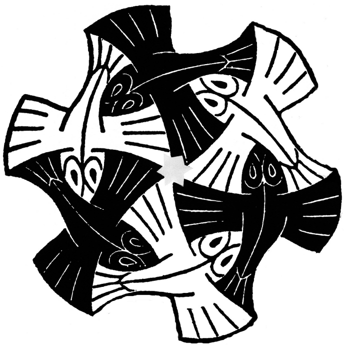
   (b) Bilden Sie aus den obigen Grossbuchstaben dreibuchstabige Wörter, so dass das entsprechende Wort als Ganzes die folgende Symmetriegruppe besitzt:
   (b1) $\mathbb{D}_1$, (b2) $\mathbb{D}_2$, (b3) $\mathbb{C}_2$

2. Symm(Ω_1) bzw. Symm(Ω_2) bezeichnet die Menge aller **Symmetrietransformationen** der Figur Ω_1 bzw. der Figur Ω_2. (kleine Zeichenungenauigkeiten bitte ignorieren, Färbung berücksichtigen)

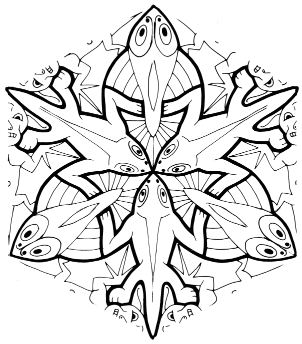
   (a) Ermitteln Sie Symm(Ω_1) und Symm(Ω_2). (Führen Sie geeignete Bezeichnungen ein.)

   (b) Stellen Sie von Symm(Ω_1) die zugehörige Gruppentafel auf.

   (c) Bestimmen Sie mit Hilfe von dieser Gruppentafel alle Lösungen X (Symmetrietransformationen von Ω_1) der folgenden Gleichungen:
   (c1) $R_{Z,120^\circ} \circ X = I$, (c2) $X \circ X = R_{Z,120^\circ}$, (c3) $X \circ X \circ X = I$



Figur Ω_1



Figur Ω_2

3. Die Menge der **Symmetrietransformationen** Symm(Ω) einer ebenen Figur Ω sei gegeben durch Symm(Ω) $= \{I, X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

   (a) Vervollständigen Sie die abgebildete Tafel, so dass eine Gruppe entsteht.

$\circ$	I	X_1	X_2	X_3	X_4
I					
X_1		X_2	X_3		
X_2		X_3			
X_3					
X_4					

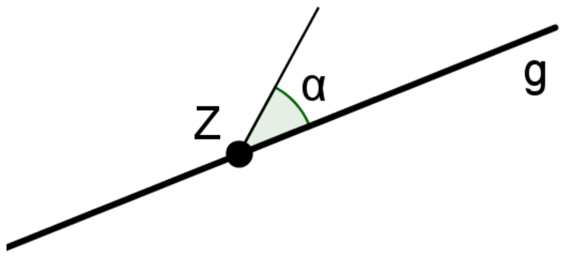
   (b) Skizzieren Sie eine ebene Figur, welche die obige Symmetriegruppe besitzt. Führen Sie anschliessend geeignete Bezeichnungen ein und geben Sie eine mögliche 'Lösung' für X_1, X_2, X_3 und X_4 an.

Zusatzserie 6

4. **Rotation und Geradenspiegelung:** Das Rotationszentrum Z liegt auf der Spiegelungsgeraden g, für den Drehwinkel α gilt $0 < \alpha < 360°$.

   (a) Untersuchen Sie die Verkettung $R_{Z,\alpha} \circ S_g$ der Geradenspiegelung S_g und der Rotation $R_{Z,\alpha}$. Anleitung: Mit Hilfe von Satz 2.9 (vgl. Skript zur Vorlesung) bestimmen Sie den 'Typ' der Kongruenztransformation und mit Hilfe der Bilder $P' = S_g(P)$ und $P'' = R_{Z,\alpha}(P')$ eines gewählten Punktes P die Lage des bestimmenden Elements.

   (b) Untersuchen Sie die Spezialfälle $\alpha = 0°$ und $\alpha = 180°$ sowie die Verkettung $S_g \circ R_{Z,\alpha}$ ('zuerst S_g, dann $R_{Z,\alpha}$').



5. Bezeichne Symm(Ω) die Menge aller Symmetrietransformationen der **Symmetriegruppe** der ebenen Figur Ω und Z einen Punkt von Ω. Von der Menge Symm(Ω) ist bekannt, dass sie die Rotation $R_{Z,90°}$ umfasst.

   (a) Welche Elemente umfasst Symm(Ω) im Minimum? Geben Sie ferner von jedem Element an (ohne Beweis), wie es durch Verketten von $R_{Z,90°}$ erzeugt werden kann.

   (b) Skizzieren Sie eine Figur Ω mit der Symmetriegruppe aus Teilaufgabe (a). (Z angeben!)

   (c) Symm(Ω) umfasse neben $R_{Z,90°}$ auch noch die Spiegelung S_g, wobei die Gerade g durch Z geht. Welche Elemente umfasst nun Symm(Ω) mindestens? Geben Sie ferner von jedem Element an (ohne Beweis), wie es durch Verketten von $R_{Z,90°}$ und S_g erzeugt werden kann.

   (d) Skizzieren Sie eine Figur Ω mit der Symmetriegruppe aus (c). (Z und g angeben!)

Zusatzserie 6, FS 08, Seite 1

1 (a) $\mathbb{D}_1$: A, B, C, D, E, M, T, U, V, W, Y (1 Symm.achse) $\mathbb{C}_1$: F, G, J, K, L, P, Q, R (keine Symm.)

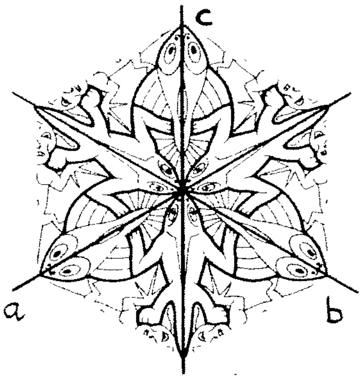
$\mathbb{D}_2$: H, I, O, X (2 Symm.achsen) $\mathbb{C}_2$: N, S, Z (Punktsymm.)

(b) $\mathbb{D}_1$: -BOB-, AHA $\mathbb{D}_2$: -OHO- $\mathbb{C}_2$: SOS, NON,

---

2 (a) $\mathrm{Symm}(\Omega_1) = \{I, R_{Z,120°}, R_{Z,240°}\}$ (Z = Figurzentrum)

$\mathrm{Symm}(\Omega_2) = \{I, R_{Z,120°}, R_{Z,240°}, S_a, S_b, S_c\}$ (Z Figurzentrum)



(b)

$\circ$	I	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$
I	I	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$
$R_{Z,120°}$	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$	I
$R_{Z,240°}$	$R_{Z,240°}$	I	$R_{Z,120°}$

(c1) $X = R_{Z,240°}$

(c2) $X = R_{Z,240°}$

(c3) $X_1 = I$, $X_2 = R_{Z,120°}$, $X_3 = R_{Z,240°}$ } Jedes Element aus $\mathrm{Symm}(\Omega_1)$ ist Lösung! (zykl. Gruppe)

---

3 (a)

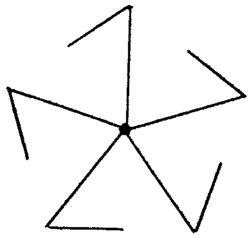
$\circ$	I	X_1	X_2	X_3	X_4
I	I	X_1	X_2	X_3	X_4 ← ①
X_1	X_1	X_2	X_3	X_4 ④	I ③
X_2	X_2	X_3	X_4	I ⑥	X_1 ⑤
X_3	X_3	X_4 ④	I ⑥	X_1 ⑧	X_2 ⑦
X_4	X_4	I ③	X_1 ⑤	X_2 ⑦	X_3

↑②

1. Zeile ① ergänzen
2. Spalte ② "
3. I in ③, X_4 in ④

weiter mit ⑤, ⑥, ⑦, ⑧

(zykl. Gruppe!)



(Bem: Gruppenaxiome G1, G3, G4 gemäss Tafel erfüllt, G2 für Kongr.trsf stets erfüllt.)

(b) $X_1 = R_{Z,72°}$, $X_2 = R_{Z,144°}$, $X_3 = R_{Z,216°}$, $X_4 = R_{Z,288°}$ (Z Figurzentrum)

---

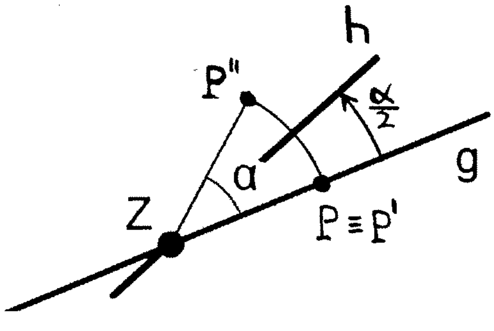
4 (a) Z ist Fixpunkt von $R_{Z,\alpha} \circ S_g$ (Kongruenztransformation!) da Fixpunkt von S_g und von $R_{Z,\alpha}$.

Nach Satz 2.9 ist ist $\underbrace{R_{Z,\alpha} \circ S_g}_{\text{gegensinnig!}}$ entweder die Identität (Orientierung, I gleichsinnig)

eine Rotation (" , R ")

oder eine Geradenspiegelung an einer Geraden h durch Z

$R_{Z,\alpha} \circ S_g$ ist also eine Geradenspiegelung S_h, und zwar geht h durch Z und der Winkel von g nach h ist $\alpha/2$, wie der Punkt P zeigt.



(b) $\alpha = 0°$, d.h. $R_{Z,\alpha} = I$ also $R_{Z,\alpha} \circ S_g = I \circ S_g = S_g$

$\alpha = 180°$, d.h. $\alpha/2 = 90°$, also $h \perp g$

$S_g \circ R_{Z,\alpha} = S_h$, h durch Z, der Winkel von g nach h ist $-\frac{\alpha}{2}$

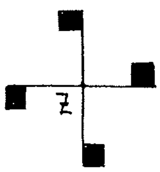
---

5 (a) Durch $R_{Z,90°}$ kann jedes Element der zykl. Gruppe $\mathbb{C}_4$ erzeugt werden:

$R_{Z,90°}$ | $R_{Z,180°} = R_{Z,90°} \circ R_{Z,90°}$ | $R_{Z,270°} = R_{Z,90°} \circ R_{Z,90°} \circ R_{Z,90°}$ | $I = R_{Z,360°} = \underbrace{R_{Z,90°} \circ \ldots \circ R_{Z,90°}}_{4\text{ Faktoren}}$

(Dies ist die kleinste Gruppe, die $R_{Z,90°}$ enthält)

(b)



(c) Durch $R_{Z,90°}$ und S_g kann jedes Element der Diedergruppe $\mathbb{D}_4$ erzeugt werden.

I, $R_{Z,90°}$, $R_{Z,180°}$, $R_{Z,270°}$ (Erzeugung siehe (a)), S_g

$S_{g_2} = R_{Z,90°} \circ S_g$ | $S_{g_3} = R_{Z,90°} \circ S_{g_1} = R_{Z,90°} \circ (R_{Z,90°} \circ S_g)$

$S_{g_4} = R_{Z,90°} \circ S_{g_3} = R_{Z,90°} \circ (R_{Z,90°} \circ (R_{Z,90°} \circ S_g))$

(d)