Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

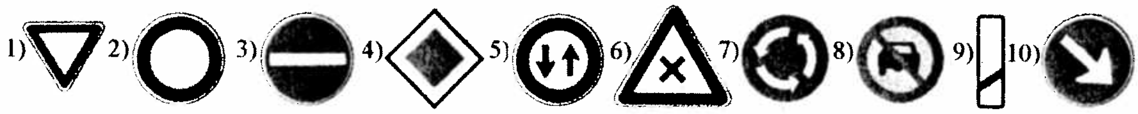
Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.

Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

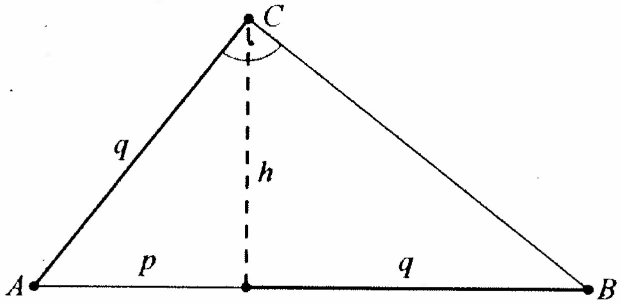
   (a) Geben Sie von den Abbildungen 1, ..., 10 die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1$, ..., $\mathbb{C}_1$, ... an. (Ignorieren Sie kleine Bildfehler! Die Pfeile in 5) bzw. 7) seien gleich und gleichfarbig.)



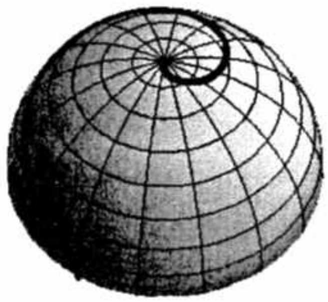
   (b) Im **rechtwinkligen Dreieck** ABC teilt die Höhe h die Hypotenuse AB gerade so, dass der grössere Abschnitt q gleich gross wie die kleinere Kathete AC ist (Figur 1). In welchem Verhältnis $q : p$ teilt dann die Höhe h die Hypotenuse? Um was für ein Verhältnis handelt es sich dabei?

   (c) Ein **Auto** fährt gleichmässig im Uhrzeigersinn eine schraubenförmige Rampe mit dem Radius r und der Höhe h in der Zeit T hinunter. Dabei dreht sich das Auto um 360°. (c1) Erstellen Sie eine Skizze, tragen Sie darin das von Ihnen gewählte Koordinatensystem ein (Ursprung, Koordinatenachsen!) und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Bewegung, die das Auto beschreibt. (c2) Wie schnell fährt das Auto? (formale Lösung)

   (d) Figur 2 zeigt einen **spiralförmigen Weg**, der vom obersten Punkt einer Halbkugel vom Radius 1 *auf der Halbkugel* in einer Windung zum Grundkreis hinunter führt. Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und finden Sie eine Parameterdarstellung, die ungefähr den abgebildeten Weg beschreibt.



Figur 1 (Aufgabe 1b)



Figur 2 (Aufgabe 1d)

2. [10P.] Die Menge der **Symmetrietransformationen** Symm(Ω) einer ebenen Figur Ω sei gegeben durch Symm(Ω) $= \{I, U, V, W\}$.

   (a) Übertragen Sie die Tafel in Ihre Unterlagen und ergänzen Sie sie, sodass eine Gruppe entsteht.

$\circ$	I	U	V	W
I				
U				
V			I	
W				V

   (b) Skizzieren Sie eine ebene Figur Ω_1, die die obige Symmetriegruppe besitzt. Führen Sie anschliessend geeignete Bezeichnungen ein und geben Sie *alle* möglichen 'Lösungen' für U, V, W an.

   (c) Skizzieren Sie eine ebene Figur Ω_2, deren Symmetriegruppe gleich viele Elemente wie Symm(Ω_1) besitzt, die jedoch nicht die gleiche Symmetrie hat.

   (d) Welches ist die kleinste Symmetriegruppe, die neben I, U, V, W aus Teilaufgabe (b) noch zusätzlich eine Geradenspiegelung S_g (an einer Geraden g durch das Symmetriezentrum) enthält?

3. [11P.] Wir betrachten in dieser Aufgabe ein **reguläres Tetraeder** $ABCD$ der Kantenlänge s mit Umkugel. Bezeichne Z den Umkugelmittelpunkt und M_{AB}, M_{CD} die Mittelpunkte der Kanten AB, CD.

   (a) Skizzieren Sie den 'Querschnitt' des Tetraeders, der entsteht, wenn das Tetraeder mit der Ebene geschnitten wird, die AB und den Punkt M_{CD} enthält. (Seitenlängen angeben!)
   (b) Das Tetraeder wird entlang der Verbindungsgeraden $M_{AB}M_{CD}$ betrachtet. Skizzieren Sie den bei dieser Betrachtung wahrgenommenen Umriss des Körpers.
   (c) Geben Sie eine Symmetrietransformation des Tetraeders an, die die Kante AB in die Kante CD überführt (wesentliche Elemente genau beschreiben). Welche Lage hat der Umkugelmittelpunkt Z in Bezug auf M_{AB} und M_{CD}?
   (d) Berechnen Sie mithilfe von (a) und (c) den Radius der Umkugel ausgedrückt durch s.
   (e) Das Tetraeder $ABCD$ wird wie in Figur3 abgebildet zu einem regelmässigen Pyramidenstern vergrössert. (Diesen kann man sich auch als zwei gegeneinander verdrehte Tetraeder vorstellen.) Um welchen Faktor vergrössert sich (i) das Volumen, (ii) die Oberfläche des Tetraeders?

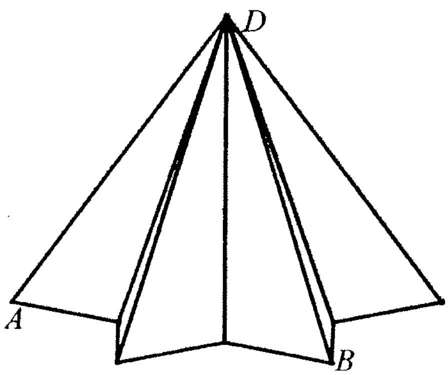
4. [8P.] Im Folgenden werden **konvexe Polyeder** betrachtet, die aus lauter 4-kantigen und/ oder 5-kantigen Ecken bestehen (D.h. dass in jeder Ecke jeweils nur 4 od. 5 Kanten zusammenstossen.) und deren Seitenflächen alles n-Ecke (nicht unbedingt reguläre) mit derselben Eckenzahl n sind.

   (a) Zeichnen Sie einen Körper bestehend aus lauter 4-kantigen Ecken und lauter Dreiecken. Skizzieren Sie ferner eine mögliche 4-kantige Ecke, in der lauter Vierecke zusammenstossen.
   (b) Zeigen Sie, dass solche am Anfang beschriebene Polyeder für $n \geq 4$ **nicht** existieren. (Falls Sie es nicht für $n \geq 4$ beweisen können, zeigen Sie es notfalls für den Fall $n = 4$: lauter Vierecke.)
   (c) Gibt es solche Polyeder für $n \geq 4$ (notfalls $= 4$), wenn man noch 6-kantige Ecken zulässt?

5. [11P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S: \ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ (1-t)\sin\varphi \\ t\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (0 \leq \varphi < 2\pi\,,\ -\infty < t < \infty)$$

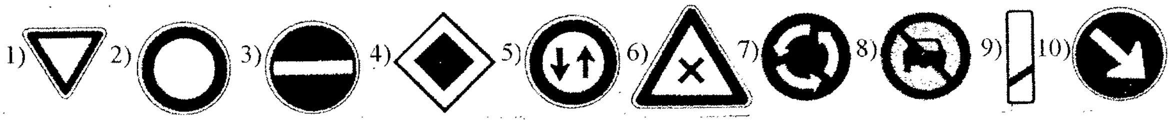
   (a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die φ-Linien zu $t = 0$ und $t = 1$. Um was für Kurven handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)
   (b) Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem die Fläche S mithilfe einiger t-Linien. Was für Kurven sind die t-Linien? (Ignorieren Sie in der Aufgabe die Sonderfälle $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \pi$.)
   (c) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)
   (d) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.
   (e) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}(\varphi_0, t_0)$. Ist S abwickelbar? (Kurze Begründung mit dem soeben erhaltenen Resultat)



Figur 3 (Aufgabe 3)

(1)

(a)



$\mathbb{D}_3$ $\mathbb{D}_\infty$ $\mathbb{D}_2$ $\mathbb{D}_4$ $\mathbb{C}_2$ $\mathbb{D}_1$ $\mathbb{C}_3$ $\mathbb{C}_1$ $\mathbb{C}_1$ $\mathbb{D}_1$

(b) Pythagoras im $\llcorner$-ΔAHC: $q^2 - p^2 = h^2$ Pythagoras im $\llcorner$-ΔABC: $|BC|^2 = (p+q)^2 - q^2$
$= p^2 + 2pq + \cancel{q^2} - \cancel{q^2}$

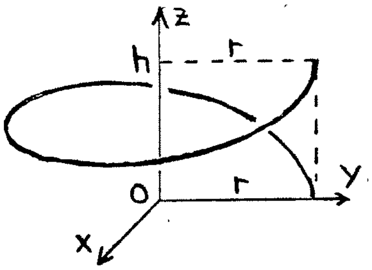
Pythagoras im $\llcorner$-ΔHBC: $|BC|^2 - q^2 = h^2$

$\rightsquigarrow q^2 - p^2 = p^2 + 2pq - q^2$ bzw. $2q^2 - 2pq - 2p^2 = 0 \quad \| : 2p^2$

$\left(\frac{q}{p}\right)^2 - \left(\frac{q}{p}\right) - 1 = 0$. Setze $x = \frac{q}{p}$ (oder $p=1$): $x^2 - x - 1 = 0 \rightsquigarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \ \lightning\right)$

oder: Kathetensatz im $\llcorner$-ΔABC: $q^2 = p(p+q) = pc \leftrightarrow \frac{q}{p} = \frac{c}{q} \overset{\text{Teilung nach GS}}{=} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Verhältnis des GS

(c)



Winkel φ bez. y-Achse: $\varphi(t) = \frac{2\pi}{T} t$ (von 0 linear auf 2π)

Höhe z bez (x,y)-Ebene: $z(t) = h - \frac{h}{T} t$ (von h linear auf 0)

Der Radius ist konstant (Schraubenlinie!). sin $\leftrightarrow$ cos tauschen für Uhrzeigersinn!

$$\gamma : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \sin\varphi(t) \\ r\cos\varphi(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \\ r\cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \\ h - \frac{h}{T} t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} r\frac{2\pi}{T}\cos\varphi \\ r\frac{2\pi}{T}(-\sin\varphi) \\ -\frac{h}{T} \end{pmatrix}, \quad v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{r^2 \frac{4\pi^2}{T^2}\underbrace{[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]}_{\equiv 1} + \frac{h^2}{T^2}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} + \frac{h^2}{T^2}} = \frac{1}{T}\sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}$$

oder: "Zylinderfläche" abwickeln $\rightsquigarrow$ Fahrweg $\hat{=}$ Diagonale im Rechteck mit Breite $2\pi r$ und Höhe h in Zeit T

(d) Idee: Im Grundriss eine archimedische Spirale: $\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} a\varphi\cos\varphi \\ a\varphi\sin\varphi \\ z(\varphi) \end{pmatrix}$ $0 \le \varphi \le 2\pi$ 1 Windung

(Drehrichtung im Gegenuhrzeigersinn ✓) Polarradius von 0 auf 1 $\rightsquigarrow a \cdot 2\pi = 1 \leftrightarrow a = \frac{1}{2\pi}$ in einer Windung ($\varphi = 2\pi$)

Höhe $z(\varphi)$ so, dass $|\vec{r}(\varphi)| = 1$: $(a\varphi\cos\varphi)^2 + (a\varphi\sin\varphi)^2 + z(\varphi)^2 = 1$

$$a^2\varphi^2 \underbrace{[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]}_{\equiv 1} + z(\varphi)^2 = 1 \rightsquigarrow z(\varphi) = \sqrt{1 - a^2\varphi^2} \geq 0$$

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\varphi\cos\varphi \\ \frac{1}{2\pi}\varphi\sin\varphi \\ \sqrt{1 - \frac{1}{4\pi^2}\varphi^2} \end{pmatrix}$$

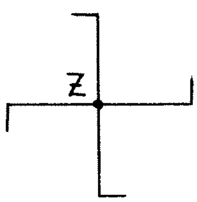
---

(2)

(a)

∘	I	U	V	W
I	I	U	V	W
U	U	V	W	I
V	V	W	I	U
W	W	I	U	V

(b)



$U = R_{z,90°}$ (Vierteldrehung um z)

$V = R_{z,180°}$ (Halbdrehung um z)

$W = R_{z,270°}$

oder $U = R_{z,270°}$ und $W = R_{z,90°}$

(c) Idee: Figur mit $\mathbb{D}_2$

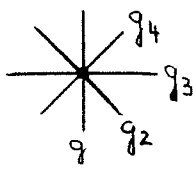
Ω_2 (Rechteck)

(Idee: Symmetriegruppen mit 4 Elementen $\mathbb{C}_4$ oder $\mathbb{D}_2$
$\mathbb{D}_2$ hat aber in der Hauptdiagonalen immer $I \rightarrow \mathbb{C}_4$)

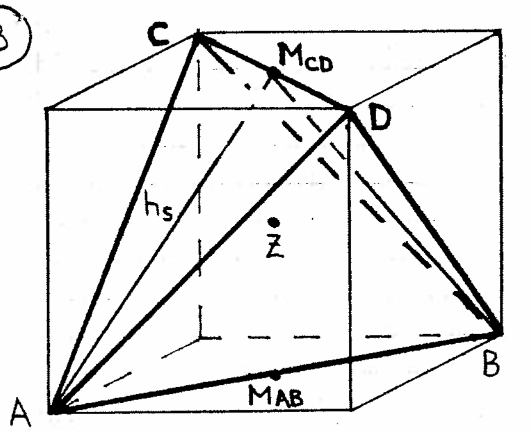
(d) $\mathbb{D}_4$ denn $R_{z,90°} \circ S_g = S_{g_2}$ $\sphericalangle(g, g_2) = \frac{90°}{2} = 45°$

$R_{z,90°} \circ S_{g_2} = S_{g_3}$ $\sphericalangle(g_2, g_3) = 45°$

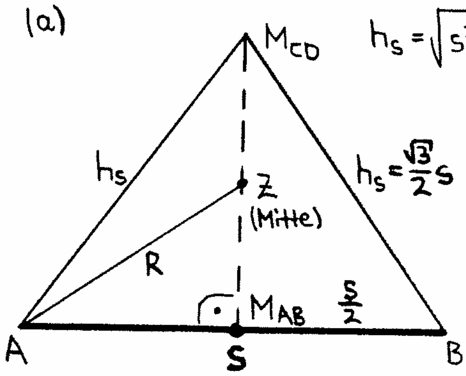
$R_{z,90°} \circ S_{g_3} = S_{g_4}$ $\sphericalangle(g_3, g_4) = 45°$



3

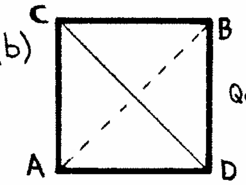


(a)



$h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} s$

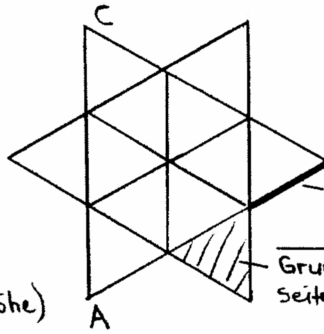
(b)



(c) Drehspiegelung mit Drehachse $M_{AB}M_{CD}$, Dreh-Winkel 90° (od. 270°) und Spiegelungsebene E ⊥ zu $M_{AB}M_{CD}$ durch Z (Mitte von M_{AB} und M_{CD})

(d) $|M_{AB}Z| = \frac{1}{2}|M_{AB}M_{CD}| = \frac{1}{2}\sqrt{h_s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}s^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} s$

$R^2 = |M_{AB}Z|^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{2}{16}s^2 + \frac{1}{4}s^2 = \frac{6}{16}s^2 = \frac{3}{8}s^2$, $\underline{\underline{R = \sqrt{\frac{3}{8}}\, s}}$



(e) Die Seitenpyramide drittelt AB, die Grundfläche ist $\frac{1}{9}$ der Grundfläche des Tetraeders. (gleichseitige Dreieckchen)

Volumen: Alle Teilpyramiden sind volumengleich (gleiche Fläche, Höhe)

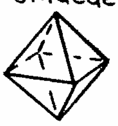
Tetraeder ≙ 9 Pyramiden, P'stern ≙ 12 Pyramiden → $\frac{12}{9} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

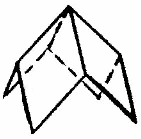
Oberfläche: Alle neuen Seitenflächen sind flächengleich (gleiche Grundlinie, Höhe), Grundfl. Stern ≙ $\frac{4}{3}$ Fläche Tetra ≙ 4 Seitenfl.

Tetraeder ≙ 4·3 Seitenflächen, P'stern ≙ 12+4 Seitenflächen → $\frac{16}{12} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

---

4 (a) Oktaeder Rhombenecke





(b) e_4; e_5 Anzahl 4- bzw. 5-kantige Ecken; ① $e_4 + e_5 = e$

② $4e_4 + 5e_5 = 2K$ (In jeder 4-kantigen Ecke stossen 4 Kanten zus., in jeder 5-kantigen 5. Dabei wird jede 2× gezählt)

③ $n f_n = 2K$ (jedes n-Eck hat n Kanten. Dabei wird jede 2× gezählt)

Polyeder

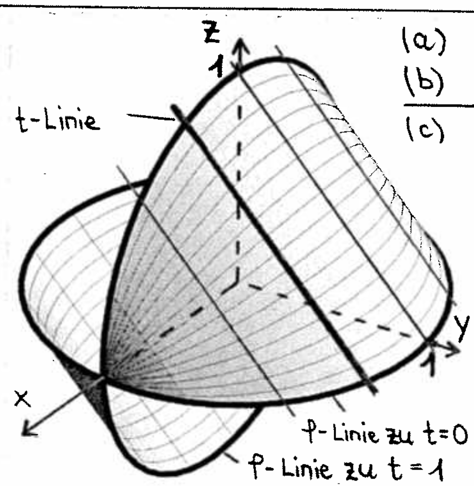
Eulersche Formel: $2 = e - k + f = e_4 + e_5 - \frac{1}{2}(4e_4 + 5e_5) + \frac{1}{n}(4e_4 + 5e_5) = \left(1 - \frac{4}{2} + \frac{4}{n}\right)e_4 + \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{n}\right)e_5$

$= \left(-1 + \frac{4}{n}\right)e_4 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{n}\right)e_5 \leq 0$, da $\frac{4}{n} \leq 1$, $\frac{5}{n} \leq \frac{3}{2}$ für $n \geq 4$ $(e_4, e_5 \geq 0)$

(c) zusätzlich e_6 gibt zusätzl. Summand: $\left(1 - \frac{6}{2} + \frac{6}{n}\right)e_6$ mit $\left(-2 + \frac{6}{n}\right) < 0$ für $n \geq 4$ $(e_6 \geq 0)$ $\underline{\underline{\text{Nein}}}$

---

5 (a)



(a) φ-Linien zu t=0 bzw. t=1: Kreis um (0,0,0) mit r=1 in (x,y)- bzw. (x,z)-Ebene

(b) t-Linien sind Geraden (parallel zur (y,z)-Ebene)

(c) S entsteht durch Parallelverschieben einer Geraden entlang den beiden Kreisen (oder einem davon) → Schar gerader Linien! Ist Regelfläche (verallg. Zylinderfläche)

(d) $x = \cos\varphi$, $y = (1-t)\sin\varphi = \sin\varphi - t\sin\varphi = \sin\varphi - z$, $z = t\sin\varphi$

$x^2 + (y+z)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \rightarrow \underline{x^2 + (y+z)^2 = 1}$

(e) $\vec{s} = \vec{r}\,'_{t_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ (1-t_0)\cos\varphi_0 \\ t_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{t} = \vec{r}\,'_{\varphi_0}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ (1-t_0)\cos\varphi_0 \\ t_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t_0)\sin\varphi_0\cos\varphi_0 + t_0\sin\varphi_0\cos\varphi_0 \\ \sin^2\varphi_0 \\ \sin^2\varphi_0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \sin\varphi_0\cos\varphi_0 \\ \sin^2\varphi_0 \\ \sin^2\varphi_0 \end{pmatrix}}} \quad (\varphi_0 \neq 0, \pi)$$

$\vec{n}$ ist unabhängig von t, d.h. $\vec{n}$ ist konstant entlang der t-Linie → abwickelbar