Theo Bühler

Lösung 1

1. Berechne die Summe $z + w$, das Produkt $z \cdot w$ und den Quotienten z/w in kartesischer Form.

a) $z = 1 + i$, $w = i$
Lösung.

$$
\begin{aligned}
z + w &= 1 + (i + i) = 1 + 2i \\
zw &= (1 + i)i = i + i^2 = -1 + i \\
z/w &= \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-i - i^2}{-i^2} = \frac{1-i}{1} = 1 - i
\end{aligned}
$$

b) $z = -2 + i$, $w = 1 - i$
Lösung.

$$
\begin{aligned}
z + w &= (-2 + 1) + (i - i) = -1 \\
zw &= (-2 + i)(1 - i) = -2(1 - i) + i(1 - i) = (-2 + 2i) + (i - i^2) = -1 + 3i \\
z/w &= \frac{-2+i}{1-i} = \frac{(-2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2(1+i) + i(1+i)}{2} = \frac{(-2-2i) + (i+i^2)}{2} \\
&= \frac{-3-i}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

c) $z = 3 + 2i$, $w = -2 - 5i$
Lösung.

$$
\begin{aligned}
z + w &= (3 - 2) + (2 - 5)i = 1 - 3i \\
zw &= (3 + 2i)(-2 - 5i) = 3(-2 - 5i) + 2i(-2 - 5i) = (-6 - 15i) + (-4i - 10i^2) \\
&= 4 - 19i \\
z/w &= \frac{3+2i}{-2-5i} = \frac{(3+2i)(-2+5i)}{(-2-5i)(-2+5i)} = \frac{3(-2+5i) + 2i(-2+5i)}{29} \\
&= \frac{(-6+15i) + (-4i - 10)}{29} = \frac{-16}{29} + \frac{11}{29}i
\end{aligned}
$$

d) $z = -4 - 16i$, $w = -5 - 10i$
Lösung.

$$\begin{aligned}
z + w &= (-4-5) + (-16-10)i = -9 - 26i \\
zw &= (-4-16i)(-5-10i) = (-4)(-5)(1+4i)(1+2i) = 20((1+2i) + 4i(1+2i)) \\
&= 20((1+2i) + (4i + 8i^2)) = 20(-7+6i) = -140 + 120i \\
z/w &= \frac{-4-16i}{-5-10i} = \frac{(-4)(1+4i)}{(-5)(1+2i)} = \frac{4}{5}\frac{1+4i}{1+2i} = \frac{4}{5}\frac{(1+4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \\
&= \frac{4}{5}\frac{(1-2i)+4i(1-2i)}{5} = \frac{4}{5}\frac{1-2i+4i-8i^2}{5} = \frac{4}{25}(9+2i) = \frac{36}{25} + \frac{8}{25}i
\end{aligned}$$

2. Berechne die Polarform respektive die kartesische Form der komplexen Zahl. Bestimme Betrag, Argument, Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl.

a) i
Lösung.

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1i = i$$

b) $1 + i$
Lösung.

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1 + i$$

c) $3e^{\frac{3\pi i}{4}}$
Lösung.

$$\begin{aligned}
&3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i \\
&= -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i
\end{aligned}$$

d) $-\sqrt{3} + i$
Lösung.

$$2e^{\frac{5\pi i}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

Siehe nächstes Blatt!

e) $5e^{\frac{11\pi i}{6}}$
Lösung.

$$5\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)=5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}i$$

3. Zeige die folgenden Identitäten für die komplexen Zahlen z und w.

a) $|z\cdot w|=|z||w|$
Lösung.
Es gilt nach Definition des Betrags

$$|z\cdot w|^2=zw\overline{zw}=zw\overline{z}\,\overline{w}=z\overline{z}w\overline{w}=|z|^2|w|^2\ .$$

Das ist eine Gleichung von nicht negativen reellen Zahlen. Wir ziehen die Wurzel und erhalten $|z\cdot w|=|z||w|$.

b) $|z+w|\leq|z|+|w|$.
Verwende hier die kartesische Form von z und w.
Lösung.
Wir schreiben z und w in kartesischer Form, $z=a+ib$ und $w=c+id$. Es gilt

$$\begin{aligned}&(|z|+|w|)^2-|z+w|^2=(|z|^2+|w|^2+2|w||z|)-|(a+c)+i(b+d)|^2\\&=(|z|^2+|w|^2+2|w||z|)-[(a+c)^2+(b+d)^2]\\&=(|z|^2+|w|^2+2|w||z|)-[(a^2+2ac+c^2)+(b^2+2bd+d^2)]\\&=(|z|^2+|w|^2+2|w||z|)-[(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2(ac+bd)]\\&=2|w||z|-2(ac+bd)\ .\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}&|w|^2|z|^2-(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2\\&=(a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2)-(a^2c^2+b^2d^2+2acbd)\\&=a^2d^2+b^2c^2-2acbd=(ad-bc)^2\geq 0\ ,\end{aligned}$$

also $|w|^2|z|^2\geq(ac+bd)^2$. Nach Ziehen der Wurzel folgt $|w||z|\geq ac+bd$. Es folgt $(|z|+|w|)^2-|z+w|^2\geq 0$, also $(|z|+|w|)^2\geq|z+w|^2$. Wir ziehen noch einmal die Wurzel und erhalten $|z|+|w|\geq|z+w|$. Diese Ungleichung heisst *Dreiecksungleichung*.