Lösung 2

In den ersten beiden Aufgaben verwenden wir oft die bekannte Formel $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ für die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Hier ist $a \neq 0$.

1. Berechne Quadrat-, Kubik- und vierte Wurzeln der komplexen Zahl. (Berechne die Quadratwurzeln auf zwei Arten, einmal mit dem kartesischen Ansatz $a + ib$ und einmal mit Polarkoordinaten. Für die Kubik- und vierte Wurzeln genügt es, die Polarform anzugeben.)

a) $z = -5i$

Lösung:

Quadratwurzeln. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\pm(1 + i)$ die beiden Quadratwurzeln von $2i$ sind. Da $-5i = \left(-\frac{5}{2}\right) 2i$ folgt, dass

$$\left(\frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{2}i\right)(\pm(1+i)) = \pm\frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

die beiden Quadratwurzeln von $-5i$ sind. Aus der Polarform $-5i = 5e^{3\pi i/2}$ folgt, dass die beiden Quadratwurzeln $\sqrt{5}e^{3\pi i/4}$ und $\sqrt{5}e^{7\pi i/4}$ sind.

Kubische Wurzeln. Aus der Polarform von $-5i$ lesen wir ab, dass die drei kubischen Wurzeln

$$5^{1/3}e^{\pi i/2} = 5^{1/3}i, \quad 5^{1/3}e^{\pi i/2+2\pi i/3}, \quad 5^{1/3}e^{\pi i/2+4\pi i/3}$$

sind.

Vierte Wurzeln. Aus der Polarform von $-5i$ lesen wir ab, dass die vier vierten Wurzeln

$$5^{1/4}e^{3\pi i/8+\pi ik/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

sind.

b) $z = 3 + 4i$

Lösung:

Quadratwurzeln. $a + ib$ ist eine Quadratwurzel von z genau dann, wenn $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = z$ gilt. Dies ist äquivalent zu den Gleichungen

$a^2 - b^2 = 3$ und $ab = 2$. Wir substituieren $b = 2/a$ in die erste Gleichung und erhalten $a^4 - 3a^2 - 4 = 0$. Die Lösungen sind

$$a^2 = \frac{3 \ \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} \quad .$$

Da $a^2 \geq 0$ folgt $a = \pm 2$. Es folgt $b = 2/a = \pm 1$. Die Quadratwurzeln sind also $a + ib = \pm(2+i)$. Die Polarform von $3+4i$ ist $5e^{i\varphi}$ mit $\varphi = \arctan(4/3)$. Die Quadratwurzeln sind also $5^{1/2}e^{i\varphi/2}$ und $5^{1/2}e^{i(\varphi/2+\pi)}$.
Kubische Wurzeln. Aus der Polarform von $3+4i$ lesen wir ab, dass die kubischen Wurzeln

$$5^{1/3}e^{i\varphi/3}, \quad 5^{1/3}e^{i\varphi/3+2\pi i/3}, \quad 5^{1/3}e^{i\varphi/3+4\pi i/3}$$

sind.
Vierte Wurzeln. Aus der Polarform von $3+4i$ lesen wir ab, dass die vierten Wurzeln

$$5^{1/4}e^{i\varphi/4+k\pi i/2}, \quad k = 0,1,2,3$$

sind.

c) $z = 1 + i$
Lösung: Quadratwurzeln. Wie in der vorhergehenden Teilaufgabe gelten für eine Quadratwurzel $a + ib$ die Gleichungen $a^2 - b^2 = 1$ und $2ab = 1$. Wir substituieren $b = \frac{1}{2a}$ in die erste Gleichung und erhalten $4a^4 - 4a^2 - 1 = 0$. Die Lösungen sind $a^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\frac{1}{2}$. Da $a^2 \geq 0$ ist, folgt

$$a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

und nach Erweitern des Bruchs

$$b = \frac{1}{2a} = \pm\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\sqrt{1+\sqrt{2}} \ .$$

Die Quadratwurzeln sind also

$$a + ib = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}(1 + (\sqrt{2}-1)i) \ .$$

Da $1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$ sind die beiden Quadratwurzeln in Polarform $2^{1/4}e^{\pi i/8}$ und $2^{1/4}e^{9\pi i/8}$.
Kubische Wurzeln. Aus der Polarform von $1+i$ lesen wir ab, dass die kubischen Wurzeln

$$2^{1/6}e^{\pi i/12}, \quad 2^{1/6}e^{\pi i/12+2\pi i/3}, \quad 2^{1/6}e^{\pi i/12+4\pi i/3}$$

Siehe nächstes Blatt!

sind.

Vierte Wurzeln. Aus der Polarform von $1+i$ lesen wir ab, dass die vierten Wurzeln

$$2^{1/8}e^{\pi i/16+\pi ik/2}, \quad k=0,1,2,3$$

sind.

2. Löse die quadratische Gleichung. Sind die Lösungen reell? Sind die Lösungen komplex konjugiert zueinander?

a) $\sqrt{5}x^2+5x+\sqrt{5}=0$

Lösung:

Wir teilen durch $\sqrt{5}$ und erhalten die Gleichung $x^2+\sqrt{5}x+1=0$. Die Lösungen sind

$$x=\frac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{5-4}}{2}=\frac{-\sqrt{5}\pm 1}{2}\ .$$

Die Lösungen sind reell.

b) $-2x^2-12x-18=0$

Lösung:

Wir teilen durch -2 und erhalten die Gleichung $x^2+6x+9=(x+3)^2=0$. Die einzige Lösung ist deshalb $x=-3$ (doppelte Nullstelle). Die Lösung ist reell.

c) $x^2+x+1=0$

Lösung:

Die Lösungen sind

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\ .$$

Die Lösungen sind komplex konjugiert zueinander.

d) $x^2+ix+i=0$

Lösung:

Die Lösungen sind

$$x=\frac{-i\pm\sqrt{-1-4i}}{2}\ .$$

Wir bestimmen wie in Aufgabe **1** die Quadratwurzeln $a+ib$ von $-1-4i$. Es gilt $a^2-b^2=-1$ und $2ab=-4$. Wir substituieren $b=-2/a$ in die erste Gleichung und erhalten $a^4+a^2-4=0$. Die Lösungen sind

$$a^2=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2}\ .$$

Bitte wenden!

Da $a^2 \geq 0$, folgt

$$a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-1+\sqrt{17}}$$

und

$$b = -2/a = \mp\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{-1+\sqrt{17}}} = \mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{17}-1}(\sqrt{17}+1)}{8} \ .$$

Die beiden Lösungen sind also

$$x = \pm\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{-1+\sqrt{17}} + \left(\mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{17}-1}(\sqrt{17}+1)}{16} - \frac{1}{2}\right) i \ .$$

Diese sind nicht komplex konjugiert zueinander.

3. Zeige die *Additionstheoreme* für cos, sin und tan mit Hilfe von $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

a)

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\end{aligned}$$

Verwende hier $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.
Lösung:
Wir berechnen

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) &= e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos(\alpha) + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i \ .\end{aligned}$$

Die Additionstheoreme für sin und cos folgen jetzt durch Vergleich des Real- und Imaginärteils dieser komplexen Zahlen.

b) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
Lösung:
Wir berechnen unter Verwendung von Teilaufgabe **a**

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \ .$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Finde entsprechende Formeln für $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$ und $\tan(\alpha - \beta)$.
Lösung:
Es gilt $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ und folglich $\tan(-\varphi) = -\tan\varphi$.
Es folgt mit **a** und **b**

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha - \beta) &= -\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha \\
\tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}\ .
\end{aligned}$$