Lösung 3

1. Führe die Polynomdivision mit Rest durch.

a) $(x^5 - x^4 + x^2 - 1) : (x - 1)$
Lösung:

$$
\begin{array}{rllllllll}
 & (x^5 & -x^4 & +0x^3 & +x^2 & +0x & -1) & : (x-1) | x^4 + x + 1 \\
- & (x^5 & -x^4) & & & & & \\
\hline
 & & & & x^2 & & -1 & \\
\hline
- & & & & (x^2 & -x) & & \\
\hline
 & & & & & x & -1 & \\
- & & & & & (x & -1) & \\
\hline
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Also gilt

$$(x^5 - x^4 + x^2 - 1) : (x - 1) = x^4 + x + 1 \ \text{Rest}\, 0 \,.$$

b) $(x^4 + x^3) : (x^3 - x + 1)$
Lösung:

$$
\begin{array}{rllllll}
 & (x^4 & +x^3 & +0x^2 & +0x & +0) & : (x^3 - x + 1) | x + 1 \\
- & (x^4 & & -x^2 & +x) & & \\
\hline
 & & x^3 & +x^2 & -x & & \\
\hline
- & & (x^3 & & -x & +1) & \\
\hline
 & & & x^2 & & -1 &
\end{array}
$$

Also gilt

$$(x^4 + x^3) : (x^3 - x + 1) = x + 1 \ \text{Rest}\, x^2 - 1 \,.$$

c) $(2x^4 + 2x^3 + x^2) : (2x^2 - 1)$
Lösung:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & (2x^4 & +2x^3 & +x^2 & +0x & +0) & :(2x^2-1)|x^2+x+1 \\
- & (2x^4 & & -x^2) & & & \\
\hline
 & & 2x^3 & +2x^2 & & & \\
\hline
- & & (2x^3 & & -x) & & \\
\hline
 & & & 2x^2 & +x & & \\
- & & & (2x^2 & & -1) & \\
\hline
 & & & & x & +1 &
\end{array}
$$

Also gilt

$$(2x^4 + 2x^3 + x^2) : (2x^2 - 1) = x^2 + x + 1 \ \text{Rest}\, x + 1 \ .$$

d) $(ix^4 + x) : (ix^2 + 1)$
Lösung:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & (ix^4 & +0x^3 & +0x^2 & +x & +0) & :(ix^2+1)|x^2+i \\
- & (ix^4 & & +x^2) & & & \\
\hline
 & & & -x^2 & +x & & \\
\hline
- & & & (-x^2 & & +i) & \\
\hline
 & & & & x & -i &
\end{array}
$$

Also gilt

$$(ix^4 + x) : (ix^2 + 1) = x^2 + i \ \text{Rest}\, x - i \ .$$

2. Das Polynom $p(x) = 6x^5 - 45x^4 + 110x^3 - 90x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, hat lokale Extrema an den Stellen $x = 0, 1, 2, 3$.

a) Skizziere p.
Lösung:
Man berechnet die lokalen Extrema $p(0) = c$, $p(1) = c - 19$, $p(2) = c - 8$ und $p(3) = c - 27$. Eine Skizze befindet sich auf der nächsten Seite.

b) Für welche Werte von c hat p 5 reelle Nullstellen, 3 reelle und 2 komplexe Nullstellen, 1 reelle und 4 komplexe Nullstellen?
Lösung:
Aus der Skizze des Graphen lesen wir ab:

- $c < 0$ oder $c > 27$: p hat 1 reelle und 4 komplexe Nullstellen.
- $0 \leq c < 8$ oder $19 < c \leq 27$: p hat 3 reelle und 2 komplexe Nullstellen.
- $8 \leq c \leq 19$: p hat 5 reelle Nullstellen.

Siehe nächstes Blatt!

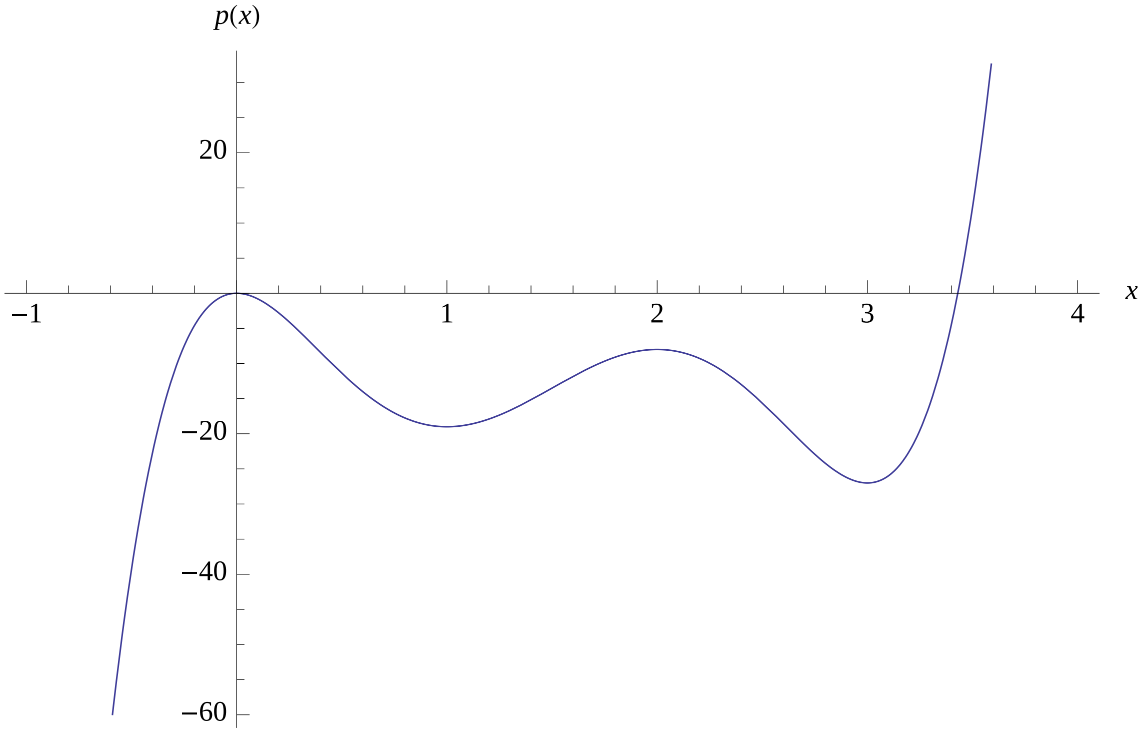

Abbildung 1: Skizze des Graphen von $p(x)$ für $c = 0$

Beachte: Wenn der Graph von p die x-Achse nur berührt, aber nicht schneidet, so hat p dort eine doppelte Nullstelle. Dieser Fall tritt genau für $c = 0, 8, 19, 27$ ein.

c) Können in **b** andere Fälle auftreten?
Lösung:
Da das Polynom p reelle Koeffizienten hat, treten seine komplexen Nullstellen in konjugiert komplexen Paaren auf. Die mögliche Anzahl komplexer Nullstellen von p ist also 0,2 oder 4. Deshalb können in **b** keine anderen Fälle auftreten.

3. *(Lagrange-Interpolationspolynome vom Grad* 3*)* Sei $p_k(x)$, $k = 0, 1, 2, 3$, das Polynom vom Grad 3, für welches $p_k(n) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$, $n = 0, 1, 2, 3$, gilt.

a) Berechne $p_k(x)$ in der Form $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
Lösung:

Bitte wenden!

Das Polynom $(x-1)(x-2)(x-3)$ verschwindet bei $x = 1, 2, 3$. Der Wert bei $x = 0$ ist -6. Also ist

$$p_0(x) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = -\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) .$$

Genauso finden wir

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{1}{2}x(x-2)(x-3) = \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x) \\ p_2(x) &= -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3) = -\frac{1}{2}(x^3 - 4x^2 + 3x) \\ p_3(x) &= \frac{1}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x) . \end{aligned}$$

Man kann dieses Resultat in der Formel

$$p_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{3}(x-j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{3}(k-j)}$$

zusammenfassen. Hier haben wir das Produktsymbol $\prod$ (Vorlesung) verwendet. Die $p_k(x)$ heissen *Lagrange-Interpolationspolynome* vom Grad 3.

b) Sei $p(x)$ ein Polynom mit $p(n) = y_n$, $n = 0, 1, 2, 3$. Zeige

$$p(x) = y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + y_2 p_2(x) + y_3 p_3(x) .$$

Lösung:
Das Polynom $b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x) + b_3 p_3(x)$ hat nach Konstruktion der Polynome $p_k(x)$ bei $x = 0$ den Wert $b_0 1 + b_1 0 + b_2 0 + b_3 0 = b_0$. Genauso findet man, dass der Wert bei $x = k$, $k = 0, 1, 2, 3$, $b_k = p(k)$ ist. Also ist

$$p(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x) + b_3 p_3(x) .$$

c) Berechne das Polynom $p(x)$, für welches

$$p(0) = -15 \quad p(1) = -1 \quad p(2) = 1 \quad p(3) = 15$$

gilt.
Lösung:
Es gilt nach **b**

$$p(x) = -15 p_0(x) - p_1(x) + p_2(x) + 15 p_3(x)$$

und Einsetzen der Ausdrücke $p_k(x)$ aus der Lösung von **a** ergibt

$$p(x) = 4x^3 - 18x^2 + 28x - 15 .$$

Siehe nächstes Blatt!

Alternative Lösung (ohne **b***):*
Wir verwenden, dass $p(3) = -p(0)$ und $p(2) = -p(1)$ gilt. Also können wir annehmen, dass $p(-(x-1.5)) = -p(x-1.5)$ gilt. Es folgt, dass p von der Form $p(x) = a(x-1.5)^3 + b(x-1.5)$ ist, wobei die Koeffizienten a und b zu bestimmen sind. Es gilt

$$\begin{aligned} -15 = p(0) &= a\frac{-27}{8} - b\frac{3}{2} \\ -1 = p(1) &= a\frac{-1}{8} - b\frac{1}{2}\ . \end{aligned}$$

Nach Kürzen folgt $a = 4$ und $b = 1$. Also ist $p(x) = 4(x-1.5)^3 + (x-1.5)$.