

Lösung 4

1. Berechne

a) $10!$

Lösung:

Wir berechnen nacheinander $4!=24$, $5!=5(4!)=120$, $6!=6(5!)=720$, $7!=7(6!)=5040$,
 $8!=8(7!)=40320$, $9!=9(8!)=362880$ und $10!=10(9!)=3628800$.

b) $12!$

Lösung: Wir berechnen mit **a** $12!=(12 \cdot 11)(10!)=132(10!)=479001600$.

c) $\binom{7}{3}$

Lösung:

Wir berechnen $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35$.

d) $\binom{28}{26}$

Lösung:

Wir berechnen

$$\binom{28}{26} = \binom{28}{28-26} = \binom{28}{2} = \frac{28 \cdot 27}{2} = 14 \cdot 27 = 378 .$$

e) $\binom{45}{6}$

Lösung:

Wir berechnen

$$\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 20 = 8145060 .$$

In der ersten Gleichung haben wir gekürzt.

f) $\binom{49}{6}$

Lösung:

Wir berechnen

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 49 \cdot 8 \cdot 47 \cdot 23 \cdot 3 \cdot 11 = 13983816 .$$

In der ersten Gleichung haben wir gekürzt.

Bitte wenden!

g) $\binom{20}{10}$

Lösung:

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\binom{20}{10} &= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= \frac{2 \cdot 19 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= 2^2 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 11 = 184756.\end{aligned}$$

In der ersten und zweiten Gleichung haben wir gekürzt.

2. (Chu-Vandermonde-Identität)

a) Zeige mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}.$$

Hinweis: $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$

Lösung:

Der binomische Lehrsatz besagt

$$(1+x)^N = \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} x^l.$$

Einsetzen in die im Hinweis gegebene Identität $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ ergibt

$$\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k = \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j \right) \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \right). \quad (1)$$

Wir berechnen die rechte Seite mit Hilfe der Cauchy-Produktformel (Vorlesung)

$$\sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^k \binom{m}{j} x^j \binom{n}{k-j} x^{k-j} \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} \right) x^k.$$

(1) ist eine Gleichheit von Polynomen. Diese gilt genau dann, wenn die Koeffizienten gleich sind. Die Gleichheit der Koeffizienten ist die gesuchte Identität

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Folgere aus **a**: $\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$

Lösung:

Wir setzen $m = k = n$ und erhalten in der Formel aus **a**

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 .$$

c) Berechne $\binom{10}{5}$ mit Hilfe von **b** und durch Aufstellen des Pascalschen Dreiecks.

Lösung:

Wir berechnen zuerst mit Hilfe von **b**

$$\binom{10}{5} = \sum_{j=0}^5 \binom{5}{j}^2 = 1^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2 + 5^2 + 1^2 = 2 \cdot 126 = 252 .$$

Alternativ betrachten wir das Pascalsche Dreieck. Seine n te Zeile ist durch die Einträge $\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$, gegeben. Wir berechnen diese Einträge nacheinander für $n = 6, 7, 8, 9, 10$ mit Hilfe von $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ und $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, soweit wir sie für den Wert $\binom{10}{5}$ benötigen. Das Resultat ist

$$n = 6 : *, 6, 15, 20, 15, 6, *$$

$$n = 7 : *, *, 21, 35, 35, 21, *, *$$

$$n = 8 : *, *, *, 56, 70, 56, *, *, *$$

$$n = 9 : *, *, *, *, 126, 126, *, *, *, *$$

$$n = 10 : *, *, *, *, *, 252, *, *, *, *, *$$

Die mit * bezeichneten Einträge werden für die Berechnung nicht benötigt.

d) Gib ein kombinatorisches Argument für die Identität in **a**.

Lösung:

Wir betrachten eine Urne mit $m + n$ Kugeln, nummeriert von 1 bis $m + n$. m Kugeln seien rot, die restlichen n seien blau. Die Anzahl Möglichkeiten k Kugeln aus den $m + n$ Kugeln auszuwählen ist der Binomialkoeffizient $\binom{m+n}{k}$ (Vorlesung). Die Anzahl Möglichkeiten k Kugeln aus den $m+n$ Kugeln auszuwählen, so dass genau j davon rot sind, ist $\binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$. (Beachte, dass im Fall $j > m$ oder $k-j > n$ diese Anzahl null ist.) Wenn wir diese Anzahl über $j = 0, 1, \dots, k$ summieren, erhalten wir $\binom{m+n}{k}$. Dies ist ein kombinatorischer Beweis der Identität in **a**.

Bitte wenden!

3. (Trinomische Formel)

a) Zeige, dass der binomische Lehrsatz als

$$(a + b)^n = \sum_{\substack{0 \leq j, k \leq n \\ j+k=n}} \frac{n!}{j!k!} a^j b^k$$

geschrieben werden kann.

Lösung:

Der binomische Lehrsatz besagt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Wenn wir einen zweiten Summationsindex $j = n - k$ einführen, erfüllt dieser $j + k = n$ und wir können die Summe als Doppelsumme über die beiden Indizes j und k schreiben

$$\sum_{\substack{0 \leq j, k \leq n \\ j+k=n}} \binom{n}{k} a^j b^k .$$

Verwenden wir noch $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{j!k!}$, erhalten wir die gesuchte Form.

b) Verifiziere, dass

$$(a + b + c)^n = \sum_{\substack{0 \leq j, k, l \leq n \\ j+k+l=n}} \frac{n!}{j!k!l!} a^j b^k c^l$$

gilt.

Lösung:

Wir setzen zweimal den binomischen Lehrsatz in der Form **a** ein

$$\begin{aligned} ((a + b) + c)^n &= \sum_{\substack{0 \leq i, l \leq n \\ i+l=n}} \frac{n!}{i!l!} (a + b)^i c^l \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i, l \leq n \\ i+l=n}} \frac{n!}{i!l!} \sum_{\substack{0 \leq j, k \leq i \\ j+k=i}} \frac{i!}{j!k!} a^j b^k c^l \\ &= \sum_{\substack{0 \leq j, k, l \leq n \\ j+k+l=n}} \frac{n!}{j!k!l!} a^j b^k c^l . \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Multipliziere $(a + b + c)^5$ aus.

Lösung:

Wir verwenden die Formel aus **b** für $n = 5$ und erhalten

$$\begin{aligned}(a + b + c)^5 = & a^5 + b^5 + c^5 \\ & + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 \\ & + 5a^4c + 10a^3c^2 + 10a^2c^3 + 5ac^4 \\ & + 5b^4c + 10b^3c^2 + 10b^2c^3 + 5bc^4 \\ & + 20a^3bc + 20b^3ac + 20c^3ab \\ & + 30a^2b^2c + 30a^2c^2b + 30b^2c^2a .\end{aligned}$$