Lösung 5

1. Berechne den Grenzwert, wenn er existiert.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n+1}{n^3+2n^2-n}$
Lösung:
Wir berechnen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+1}{n^3+2n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}-n^{-2}+n^{-3}}{1+2n^{-1}-n^{-2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(n^{-1}-n^{-2}+n^{-3})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+2n^{-1}-n^{-2})}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} - \lim\limits_{n\to\infty} n^{-2} + \lim\limits_{n\to\infty} n^{-3}}{1+2\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} - \lim\limits_{n\to\infty} n^{-2}}$$
$$= \frac{0-0+0}{1+2\cdot 0-0} = 0\,.$$

Hier haben wir erstens den Bruch mit n^{-3} erweitert. Zweitens haben wir die Rechenregel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ angewendet. Drittens haben wir die Rechenregel $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ angewendet. Schliesslich haben wir $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-k} = 0$ für $k>0$ (Vorlesung) verwendet.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2n^6+3n^4+2n^2-1}{5n^6-20n^5}$
Lösung:
Wir gehen wie in Teilaufgabe **a** vor und berechnen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^6+3n^4+2n^2-1}{5n^6-20n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2+3n^{-2}+2n^{-4}-n^{-6}}{5-20n^{-1}}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-2+3n^{-2}+2n^{-4}-n^{-6})}{\lim\limits_{n\to\infty}(5-20n^{-1})} = -\frac{2}{5}\,.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-1}{n^3+n^2+n+1}$
Lösung:
Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4-1}{n^3+n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-n^{-3}}{1+n^{-1}+n^{-2}+n^{-3}}\,.$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n^{-1}+n^{-2}+n^{-3})=1$, aber $\lim\limits_{n\to\infty}(n-n^{-3})$ existiert nicht. Also existiert der Grenzwert nicht.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2+i)n^7-3n^5+(6-5i)n^4+3n^2}{(1-i)n^7-(2i-1)n^5+4in^4-in}$

Lösung:

Wir berechnen wie in Teilaufgabe **a**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2+i)n^7-3n^5+(6-5i)n^4+3n^2}{(1-i)n^7-(2i-1)n^5+4in^4-in}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2+i)-3n^{-2}+(6-5i)n^{-3}+3n^{-5}}{(1-i)-(2i-1)n^{-2}+4in^{-3}-in^{-6}}$$
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}((2+i)-3n^{-2}+(6-5i)n^{-3}+3n^{-5})}{\lim\limits_{n\to\infty}((1-i)-(2i-1)n^{-2}+4in^{-3}-in^{-6})}$$
$$=\frac{2+i}{1-i}=\frac{1}{2}(2+i)(1+i)=\frac{1}{2}(1+3i)\ .$$

Bemerkung: Sei $p(n)=a_Mn^M+a_{M-1}n^{M-1}+\dots$ ein Polynom vom Grad M. Sei $q(n)=b_Nn^N+b_{N-1}n^{N-1}+\dots$ ein Polynom vom Grad N und $q(n)\neq 0$. Dann findet man mit der Lösungsmethode dieser Aufgabe

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}=\begin{cases}0 & M<N\\ \frac{a_M}{b_N} & M=N\\ \text{nicht existent} & M>N\end{cases}\ .$$

2. Schreibe die ersten vier Folgenglieder der Folgen (a_n), (b_n), (c_n) explizit hin. Man kann zeigen, dass diese Folgen konvergieren. Bestimme ihre Grenzwerte.

a) $a_0=0$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

Lösung:

Die ersten vier Folgenglieder sind

$$\begin{aligned}a_0&=0\\ a_1&=\sqrt{2}\\ a_2&=\sqrt{2+\sqrt{2}}\\ a_3&=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ .\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $a=\lim_{n\to\infty}a_n$ existiert. Also erfüllt a

$$a=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}=\sqrt{2+\lim_{n\to\infty}a_n}=\sqrt{2+a}\ .$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir quadrieren diese Gleichung und erhalten die quadratische Gleichung $a^2 = 2+a$ für a. Diese hat die Lösungen $a = -1$ und $a = 2$. Die erste Lösung kommt nicht in Frage, da $a_n \geq 0$ für alle n, also auch $a \geq 0$. Deshalb ist $a = 2$.

b) Sei $x > 0$. $b_0 = 1$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right)$
Lösung:
Die ersten vier Folgenglieder sind

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= \frac{1}{2}(x+1) \\ b_2 &= \frac{x^2+6x+1}{4(x+1)} \\ b_3 &= \frac{x^4+28x^3+70x^2+28x+1}{8(x+1)(x^2+6x+1)} \ . \end{aligned}$$

Wir wissen, dass $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ existiert. Also erfüllt b

$$\begin{aligned} b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} \frac{x}{b_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(b + \frac{x}{\lim_{n\to\infty} b_n}\right) = \frac{1}{2}\left(b + \frac{x}{b}\right) \ . \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile haben wir die Rechenregel $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ verwendet. In der dritten Zeile haben wir die Rechenregel $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ für die konstante Folge $a_n = x$ verwendet. Daraus erhalten wir die quadratische Gleichung $b^2 = x$. Da $b_n > 0$ für alle n ist $b \geq 0$. Also ist $b = \sqrt{x}$.

c) Sei $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ die Fibonacci-Folge. $c_n = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$
Lösung:
Man berechnet $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$, $F_7 = 21$ und die ersten vier Folgenglieder

$$c_0 = 1 \quad c_1 = \frac{3}{2} \quad c_2 = \frac{8}{5} \quad c_3 = \frac{21}{13} \ .$$

Bitte wenden!

Wir wissen, dass $c = \lim_{n \to\infty} c_n$ existiert. Also erfüllt c

$$
\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n} + F_{2n-1}}{F_{2n}} = 1 + \lim_{n \to\infty} \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n-1}}{F_{2n-1} + F_{2n-2}} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{F_{2n-1}}{F_{2n-2}}}{\frac{F_{2n-1}}{F_{2n-2}} + 1} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n-1}}{c_{n-1} + 1} \\
&= 1 + \frac{\lim_{n\to\infty} c_{n-1}}{\lim_{n\to\infty} c_{n-1} + 1} = 1 + \frac{c}{c+1} \,.
\end{aligned}
$$

Daraus erhalten wir die quadratische Gleichung $c^2 - c - 1 = 0$ für c. Deren Lösungen sind $c = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Da $F_n > 0$ für alle n ist $c_n > 0$ für alle n. Also ist $c \geq 0$ und nur die zweite Lösung ist möglich: $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (goldener Schnitt).

3. Berechne $\sqrt{3}$ auf 8 Nachkommastellen genau.
Lösung:
Wir verwenden **2b** für $x = 3$. Wir berechnen nacheinander

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 1 \\
b_1 &= 2 \\
b_2 &= 1.75000000 \\
b_3 &= 1.73214285 \\
b_4 &= 1.73205081 \\
b_5 &= 1.73205080 \\
b_6 &= 1.73205080 \\
b_7 &= 1.73205080 \\
&\dots\,.
\end{aligned}
$$

Also erhalten wir $\sqrt{3} = 1.73205080$ auf 8 Nachkommastellen genau.

Bemerkung: Wir können die Geschwindigkeit der Konvergenz der Folge (b_n) zum Grenzwert $\sqrt{x}$ wie folgt abschätzen. Sei der Startwert $b_0 > 0$. Es gilt

$$
b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right) = \frac{(b_n - \sqrt{x})^2}{2b_n} + \sqrt{x} \,.
$$

Es folgt $b_n \geq \sqrt{x}$ für $n \geq 1$ und für den Fehler $\varepsilon_n = b_n - \sqrt{x}$

$$
\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2(\varepsilon_n + \sqrt{x})} \leq \min\left(\frac{\varepsilon_n}{2}, \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{x}}\right) \,.
$$

Siehe nächstes Blatt!

Es folgt, dass ε_n gegen 0 konvergiert. Betrachten wir der Einfachheit halber den Fall $x > 1$. Die Ungleichung $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{x}} < \varepsilon_n^2$ besagt, dass (b_n) sehr schnell konvergiert: Angenommen b_n stimmt bis auf N Nachkommastellen mit $\sqrt{x}$ überein, also $\varepsilon_n < 10^{-N}$, dann ist $\varepsilon_{n+1} < 10^{-2N}$ und folglich stimmt b_{n+1} bis auf $2N$ Nachkommastellen mit $\sqrt{x}$ überein. Die Anzahl korrekte Nachkommastellen verdoppelt sich also in jedem Schritt. Man spricht von *quadratischer Konvergenz*.