Lösung 6

1. Zwei Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ heissen *asymptotisch gleich*, wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ gilt. Welche der Folgen sind asymptotisch gleich?

a) $a_n = \sum_{k=0}^n k$, $b_n = n^3$, $c_n = n^2$, $d_n = \frac{n^2}{2}$
Lösung:
Zuerst machen wir eine allgemeine Beobachtung: Wenn $(a_n)_n$ asymptotisch gleich zu $(b_n)_n$ ist und $(b_n)_n$ asymptotisch gleich zu $(c_n)_n$ ist, dann ist $(a_n)_n$ asymptotisch gleich zu $(c_n)_n$. Also fallen die Folgen, die asymptotisch gleich zueinander sind, in disjunkte Teilmengen. Es gilt $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Vorlesung) und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 \, .$$

Grenzwerte dieser Art wurden in Serie **5**, Aufgabe **1**, berechnet. Also sind a_n und d_n asymptotisch gleich. Man sieht ebenso leicht, dass b_n und c_n nicht asymptotisch gleich zu einer der anderen Folgen ist.

b) $a_n = \frac{n^2+3n+1}{2n+5}$, $b_n = \frac{n^3+5n+1}{2n^2+1}$, $c_n = \frac{n^7}{2n^5}$, $d_n = \frac{n^4}{2n^3}$, $e_n = \frac{1}{2}n^2$
Lösung:
Mit der Methode von Serie **5**, Aufgabe **1**, finden wir, dass a_n asymptotisch gleich zu $\frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$ und b_n asymptotisch gleich zu $\frac{n^3}{2n^2} = \frac{n}{2}$ ist. Es folgt, dass a_n, b_n und d_n asymptotisch gleich zueinander sind. Weiter ist c_n asymptotisch gleich zu e_n.

c) $a_n = -\sqrt{n^3} + \sqrt{(n+1)^3}$, $b_n = n^{3/2}$, $c_n = \frac{2}{3}n^{-1/2}$, $d_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-2}$
Lösung:
Wir schreiben a_n als

$$\begin{aligned} a_n = -\sqrt{n^3} + \sqrt{(n+1)^3} &= \frac{(n+1)^3 - n^3}{\sqrt{(n+1)^3} + \sqrt{n^3}} = \frac{3n^2+3n+1}{\sqrt{(n+1)^3} + \sqrt{n^3}} \\ &= \frac{3n^2+3n+1}{3n^2} \frac{3n^2}{\sqrt{(n+1)^3} + \sqrt{n^3}} \, . \end{aligned}$$

Sei $a'_n = \frac{3n^2}{\sqrt{(n+1)^3}+\sqrt{n^3}}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n+1}{3n^2} = 1$ ist $(a_n)_n$ asymptotisch gleich zu $(a'_n)_n$. Nun gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2}n^{1/2}}{a'_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3}+\sqrt{n^3}}{2n^{3/2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{3/2}}{2n^{3/2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2} + \frac{1}{2} = 1 \,.\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass $(a'_n)_n$, also auch $(a_n)_n$, asymptotisch gleich zu $\left(\frac{3}{2}n^{1/2}\right)_n$ ist. Bei $(d_n)_n$ gehen wir ähnlich wie bei $(a_n)_n$ vor. Wir schreiben d_n als

$$d_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-2} = \frac{n^3-(n^3-2)}{\sqrt{n^3}+\sqrt{n^3-2}} = \frac{2}{\sqrt{n^3}+\sqrt{n^3-2}} \,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-3/2}}{d_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}+\sqrt{n^3-2}}{2n^{3/2}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{\frac{n^3-2}{n^3}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\lim_{n\to\infty}(1-2n^{-3})}\right) = 1 \,.\end{aligned}$$

Also ist $(d_n)_n$ asymptotisch gleich zu $(n^{-3/2})_n$. Es folgt, dass $(a_n)_n$ nicht asymptotisch gleich ist zu $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ und $(d_n)_n$. Es ist einfach zu sehen, dass $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$ ebenfalls nicht asymptotisch gleich sind. Resultat: Keine der Folgen ist asymptotisch gleich zu einer der anderen.

Zeige

2. **a)** Die Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend.
Lösung: Da $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, können wir $a_n \geq a_{n-1}$ umformulieren zu $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$. Wir rechnen für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}}\cdot\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} \\ &= \frac{n+1}{n}\cdot\frac{(n^2-1)^{n-1}}{(n^2)^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \\ &\geq \frac{n+1}{n}\left(1-(n-1)\cdot\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2} \,,\end{aligned}$$

wobei wir die Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$ für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ angewandt haben. Wegen $(n+1)(n^2-n+1) = n^3+1$ ergibt sich somit

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{n^3+1}{n^3} > 1,$$

wie gewünscht.

b) Die Folge $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist monoton fallend.

Lösung: Wir verfahren wie in **a** und zeigen, dass $\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq 1$ ist. Einsetzen und Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^n \cdot n^n}{(n-1)^n(n+1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\
&\geq \left(1+n\cdot\frac{1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+n-1}{n^2-1} \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1\,,
\end{aligned}$$

wobei wir wiederum die Bernoulli-Ungleichung verwendet haben. Daher ist $b_{n-1} > b_n$, also ist die Folge monoton fallend.

c) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Lösung. Beachte, dass $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) a_n$, also $a_n \leq b_n$, und insbesondere $a_1 \leq a_n \leq b_1$ für alle n. Die Folge a_n ist monoton steigend und beschränkt, daher ist sie konvergent. Weiter ist $1+\frac{1}{n} \to 1$. Daher ist auch

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

wie behauptet.

Bemerkung. Der Grenzwert $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818\ldots$ heisst *Eulersche Zahl.*

`http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl`

3. Sei $p_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1}$. Zeige

Bitte wenden!

a) $a_n = \frac{p_n}{\sqrt{n}}$ ist monoton fallend.
Lösung:
Da $a_n > 0$ für jedes n ist, ist $a_{n+1} \leq a_n$ äquivalent zu $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 \leq 1$. Wir berechnen diesen Ausdruck

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = \frac{n}{n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = \frac{4n^2+4n}{4n^2+4n+1} < 1\ .$$

b) $b_n = \frac{p_n}{\sqrt{n+1}}$ ist monoton wachsend.
Lösung:
Da $b_n > 0$ für jedes n ist, ist $b_{n+1} \geq b_n$ äquivalent zu $\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^2 \geq 1$. Wir berechnen diesen Ausdruck

$$\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^2 = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = \frac{4n^3+12n^2+12n+4}{4n^3+12n^2+9n+2} > 1\ .$$

c) Es gibt $p \in [\sqrt{2}, 2]$, so dass $(\sqrt{n}p)_n$ asymptotisch gleich ist zu $(p_n)_n$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $p = \sqrt{\pi}$.
Lösung:
Aus **a** und **b** erhalten wir für alle n

$$\sqrt{2} = b_1 \leq b_n < a_n \leq a_1 = 2\ .$$

Also besitzt die monoton fallende und beschränkte Folge $(a_n)_n$ einen Grenzwert p mit $\sqrt{2} \leq p \leq 2$. Dann ist $(\sqrt{n}p)_n$ asymptotisch gleich zu $(p_n)_n$, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\sqrt{n}p} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{p} = \frac{1}{p}\lim_{n\to\infty} a_n = 1\ .$$