Lösung 7

1. **a)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n}$?

Lösung:

Zuerst prüft man, ob die Glieder $\frac{1}{a^n}$ der Reihe gegen null konvergieren. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\frac{1}{|a|} < 1$ ist, d.h. $|a| > 1$. Also kann die Reihe nur für $|a| > 1$ konvergieren. Die Nte Partialsumme der Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{a^n} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{N+1} - 1}{\frac{1}{a} - 1}$$

(Vorlesung) und diese konvergiert gegen $\frac{-1}{\frac{1}{a}-1} = \frac{a}{a-1}$ für $N \to \infty$. Also konvergiert die Reihe für $|a| > 1$.

b) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}$?

Lösung:

Wir verwenden das Majorantenkriterium (Vorlesung), um die Konvergenz zu zeigen. Es gilt $\frac{n+1}{n^3} \leq \frac{2n}{n^3}$ für alle n. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (Vorlesung), konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}$.

2. Betrachte die Reihe $l(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$.

a) Konvergiert $l(1)$?

Lösung:

Ja, $l(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen, da $(\frac{1}{n})_n$ eine monoton fallende Folge ist, die gegen null konvergiert.

b) Konvergiert $l(-1)$?

Lösung:

Nein, $l(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ ist das Negative der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, die divergiert (Vorlesung).

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $l(x)$?

Lösung:

Bitte wenden!

Wir wenden eine aus der Vorlesung bekannte Folgerung des Majorantenkriteriums an: Sei $(a_n)_n$ eine Folge, so dass $|a_n| \leq 1$ gilt für alle n. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ für $|x| < 1$. Dies ist für $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ erfüllt, und folglich konvergiert $l(x)$ für $|x| < 1$. Für $|x| > 1$ konvergieren die Glieder der Reihe im Betrag $\left|\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n}$ gegen unendlich, da ihr Kehrwert $\frac{n}{|x|^n}$ gegen null konvergiert (Vorlesung). Also konvergiert die Reihe für $|x| > 1$ nicht.

d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $l(x)$ alternierend?
Lösung:
Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heisst alternierend, wenn b_{n+1} das entgegengesetzte Vorzeichen von b_n hat für jedes n. Für $b_n = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ ist das genau dann der Fall, wenn $x > 0$ ist.

Bemerkung: Wir werden sehen, dass $l(x) = \ln(x+1)$ für $|x| < 1$ ist.

3. Für $s > 1$ setzt man $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *(Riemann-Zeta-Funktion)*. Zeige, dass die Reihe $\zeta(s)$ konvergiert.
Lösung:
Wir verfahren wie in dem in der Vorlesung gegebenen Beweis, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Wir verwenden das Majorantenkriterium, um die Konvergenz zu prüfen. Wir schreiben die Reihe als

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{ks}} + \frac{1}{(2^k+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^s} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^{ks}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(-s+1)} = \frac{1}{1-2^{-s+1}}\ .
\end{aligned}$$

Wir haben die Ungleichung $\frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{2^{ks}}$ für $n \geq 2^k$ für jeden der 2^k Summanden im $k$ten Glied der Summe über k verwendet. Weiter haben wir verwendet, dass nach Annahme $s > 1$ ist, folglich $q = 2^{-s+1} < 1$ und die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ deshalb konvergiert.