Lösung 8

1. Für welche $s > 0$ und $q > 0$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^s}{q^n}$$

konvergent?

Lösung. Zunächst verwenden wir das Quotientenkriterium. Mit $a_n = \dfrac{n^s}{q^n}$ ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^s/q^{n+1}}{n^s/q^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \cdot \frac{q^n}{q^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \cdot \frac{1}{q} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{q}$$

unabhängig von $s > 0$. Wir haben $\dfrac{1}{q} < 1$ genau für $q > 1$, also ist die Reihe für alle $q > 1$ und alle $s > 0$ konvergent.

Für $0 < q \leq 1$ ist $q^n \leq 1$ und damit $a_n \geq n^s$. Für $s > 0$ ist aber n^s unbeschränkt, also kann $\sum_{n=1}^{\infty} n^s$ nicht konvergieren und wegen $a_n \geq n^s$ kann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ erst recht nicht konvergieren.

Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^s}{q^n}$ ist also genau für $q > 1$ und $s > 0$ konvergent und sonst nicht.

2. Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n$.

Lösung. Wurzelkriterium. $a_n = \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n$, also

$$\sqrt[n]{a_n} = n^{\frac{1}{n}} - 1 \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1,$$

also ist die Reihe konvergent.

Bitte wenden!

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Lösung. Leibnizkriterium. Die Folge $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ist streng monoton fallend, denn

$$a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

konvergiert wegen $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} < \sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}$ streng monoton gegen Null.

Nach Leibniz ist also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ konvergent.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Lösung. Wegen

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

ist die Folge $a_n = (-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ keine Nullfolge, die Reihe konvergiert also nicht.

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}$.

Lösung. Wurzelkriterium. Setze $b_n = a_{n+5} = \left(\frac{n+5}{2n+11}\right)^n$. Dann ist

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{n+5}{2n+11} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2},$$

also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent nach dem Wurzelkriterium. Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_5 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

Siehe nächstes Blatt!

Lösung. Quotientenkriterium. Mit $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$ ist

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{2^n n!/n^n}\\ &= 2(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\\ &= 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{e} < 1\end{aligned}$$

also ist die Reihe konvergent.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5+n^3-1}}$.

Lösung. Majorantenkriterium. Wegen

$$\frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}}{(n^5+n^3-1)^{\frac{1}{3}}} \le \frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{5}{3}}} \le \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{5}{3}}} = \frac{2}{n^{\frac{7}{6}}}$$

ist $2\zeta\left(\dfrac{7}{6}\right) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ eine konvergente Majorante. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5+n^3-1}}$$

ist also konvergent.

3. Zeige

$$\binom{s+t}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{s}{j}\binom{t}{k-j}$$

a) für $s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{C}$ durch Betrachten der beiden Seiten der Identität als Funktion von t.

Lösung:

In Serie 4, Aufgabe **2**, wurde die Identität für $s, t \in \mathbb{N}$ gezeigt. Sei $s \in \mathbb{N}$ fest. Dann ist die linke und rechte Seite der Identität ein Polynom vom Grad k in t und wir wissen, dass die Identität für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt. Aus dem Identitätssatz für Polynome folgt nun, dass sie für alle $t \in \mathbb{C}$ gilt. Der *Identitätssatz für Polynome* besagt nämlich, dass, wenn eine Gleichung von Polynomen $p(x) = q(x)$ vom Grad k für $k+1$ verschiedene komplexe Werte von x gilt, die Gleichung tatsächlich für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt, d.h. die Polynome p und q identisch sind.

Bitte wenden!

b) für $s, t \in \mathbb{C}$ durch Betrachten der beiden Seiten der Identität als Funktion von s.

Lösung:

Sei $t \in \mathbb{C}$ fest. Die linke und rechte Seite der Identität ist ein Polynom vom Grad k in s und nach **a** wissen wir, dass sie für alle $s \in \mathbb{N}$ gilt. Gemäss dem Identitätssatz für Polynome folgt, dass die Identität für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt.