Theo Bühler

Lösung 9

1. Zeige $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}} = \infty$.
Lösung:
Wir schreiben

$$(n!)^2 = n\cdot(n-1)\dots 1\cdot n\cdot(n-1)\dots 1 = (n\cdot 1)((n-1)\cdot 2)\dots(2\cdot(n-1))(1\cdot n)\ .$$

Sei $\lfloor n/2 \rfloor$ die grösste ganze Zahl $\leq n/2$. Es gilt

$$n\cdot 1 \leq (n-1)\cdot 2 \leq (n-2)\cdot 3 \leq \dots \leq (n-\lfloor n/2\rfloor + 1)\cdot\lfloor n/2\rfloor\ ,$$

weil

$$(n-k+1)k \leq (n-k)(k+1)$$

äquivalent zu $2k \leq n$ ist und deshalb für $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ erfüllt ist. Es folgt $(n!)^2 \geq n^n$, also $(n!)^{\frac{1}{n}} \geq \sqrt{n}$. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}} = \infty \quad \text{(uneigentliche Konvergenz gegen unendlich).}$$

2. Definiere

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\ .$$

a) Verifiziere $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$.
Lösung:
Wir setzen $e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!}$ ein

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(iz)^l+(-iz)^l}{2(l!)} = \sum_{l=0,\ l \text{ gerade}}^{\infty}\frac{(iz)^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\ .$$

In der zweiten Gleichung haben wir verwendet, dass wenn zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, auch ihre Summe konvergiert und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)$$

gilt.

Bitte wenden!

b) Verifiziere $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
Lösung:
Wir setzen $e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}$ ein

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iz)^l - (-iz)^l}{2i(l!)} = \sum_{l=0,\, l \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{(iz)^l}{il!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \ .$$

In der zweiten Gleichung haben wir verwendet, dass wenn zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, auch ihre Differenz konvergiert und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k)$$

gilt.

c) Berechne $\cos z \sin z$ aus **a** und **b**.
Lösung: Wir verwenden die Cauchy-Produktformel

$$\begin{aligned}\cos z \sin z &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l z^{2l+1}}{(2l+1)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2k)!(2n+1-2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!(2n+1-2k)!} \ .\end{aligned}$$

Wir berechnen mit der Pascal'schen Identität $\binom{2n+1}{2k} = \binom{2n}{2k} + \binom{2n}{2k-1}$ für $k \geq 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!(2n+1-2k)!} &= \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k}\\ &= \frac{1}{(2n+1)!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1}\right) = \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m}\\ &= \frac{(1+1)^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \ .\end{aligned}$$

Es folgt

$$\cos z \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ .$$

d) Berechne $\frac{\sin(2z)}{2}$ aus **b**.
Lösung:
Wir setzen das Resultat aus **b** ein

$$\frac{\sin(2z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2z)^{2k+1}}{2((2k+1)!)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} z^{2k+1}}{(2k+1)!} \ .$$

Siehe nächstes Blatt!

Aus **c** und **d** schliessen wir $\frac{\sin(2z)}{2} = \cos z \sin z$, was im Fall von $z \in \mathbb{R}$ als Doppelwinkelformel (Vorlesung und Serie **2**, Aufgabe **3a**) bekannt ist.

3. Zeige $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Lösung:

Nach dem Binomialsatz ist

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} .$$

Wegen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \right) = \frac{1}{k!}$$

ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x .$$