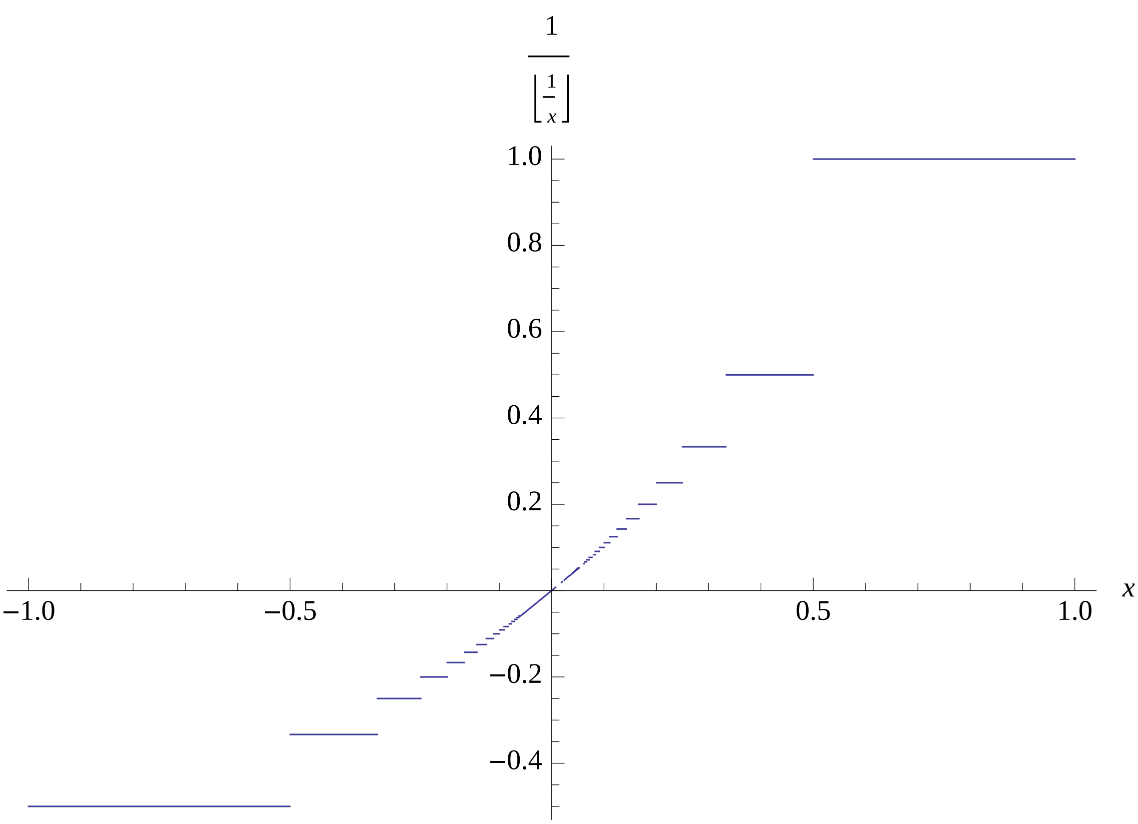
D-CHAB Grundlagen der Mathematik I (Analysis A) HS 2014
Theo Bühler

Lösung 10

1. Betrachte die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} .$$

a) Skizziere den Graphen von f.
Lösung:



b) An welchen Stellen $x \in (-1, 1)$ ist f stetig?
Lösung:
Sei $x \neq 0$. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ ist an der Stelle x genau dann stetig,

Bitte wenden!

wenn die Funktion $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ dort stetig ist. Die Gauss-Klammer $\lfloor y \rfloor$ ist für alle reellen y ausgenommen die ganzen Zahlen stetig: Sei n eine ganze Zahl. Für $n-1 \leq y < n$ ist $\lfloor y \rfloor = n-1$ eine konstante Funktion und bei $y = n$ springt der Wert von $\lfloor y \rfloor = n-1$ nach $\lfloor y \rfloor = n$ (Vorlesung). Also ist f stetig, ausser wenn $x = \pm\frac{1}{n}$ für ein $n = 2, 3, \ldots$. Wir prüfen noch die Stetigkeit von f an der Stelle $x = 0$. Sei $(x_n)_n$ eine Folge, die $x_n \neq 0$ für alle n erfüllt und gegen $x = 0$ konvergiert. Wir verifizieren, ob die Folge $(f(x_n))_n$ gegen $f(x) = 0$ konvergiert. Sei $C \in \mathbb{N}$. Dann existiert nach Definition der Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ $|x_n| < \frac{1}{C}$ gilt. Es folgt $\frac{1}{x_n} > C$ oder $\frac{1}{x_n} < -C$. Im ersten Fall gilt $\left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor \geq C$, im zweiten Fall $\left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor < -C$ nach Definition von $\lfloor\ \rfloor$ und der Wahl $C \in \mathbb{N}$. Deshalb gilt $\left| \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor \right| \geq C$ für alle $n \geq N$ und folglich

$$|f(x_n)| = \left| \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor} \right| \leq \frac{1}{C}\ .$$

Also konvergiert $f(x_n)$ gegen null. Wir haben gezeigt, dass die Funktion f in $x = 0$ stetig ist.

Wenn wir zur Skizze des Graphen aus **a** zurückkehren, sehen wir die Konzentration der Sprungstellen um $x = 0$ und, dass die Funktion in $x = 0$ stetig ist.

2. Skizziere folgende Funktionen.

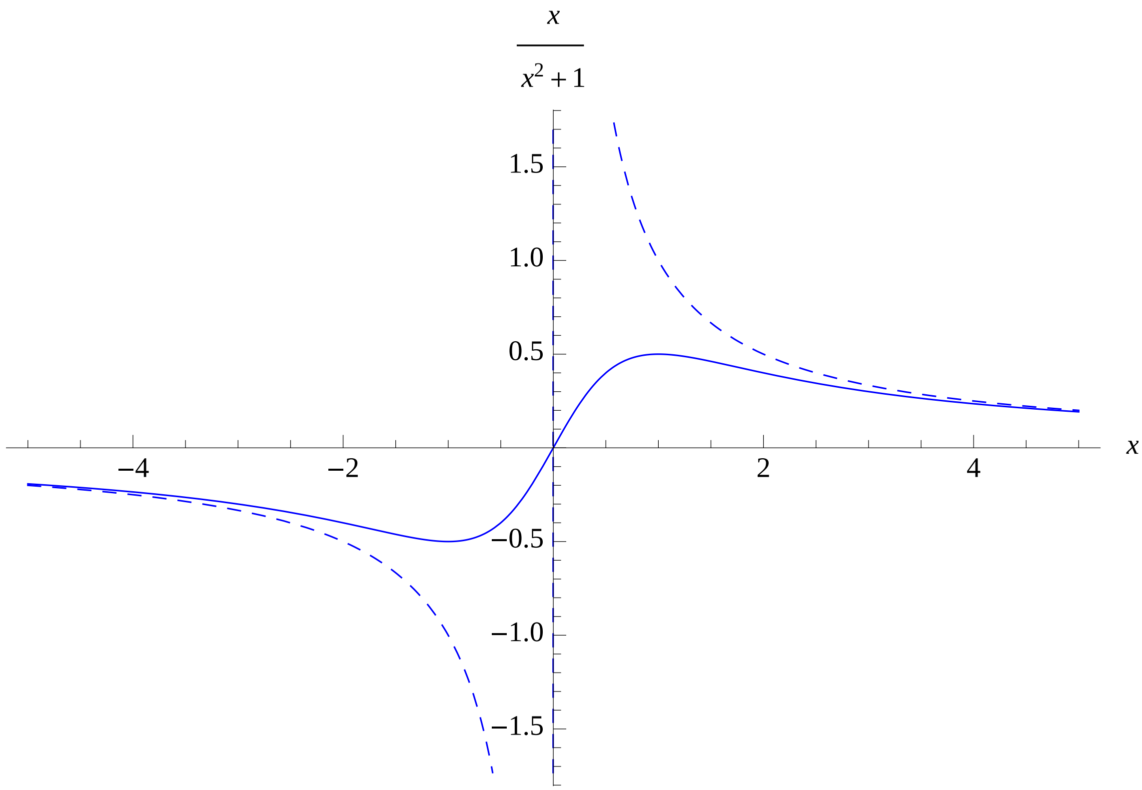
a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
Lösung:
Der Nenner von $f(x)$ hat keine (reelle) Nullstelle, also ist $f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert. Die Funktion erfüllt $f(-x) = -f(x)$, also ist ihr Graph punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs. Wegen

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

ist die Funktion $\frac{1}{x}$ eine Asymptote von $f(x)$ für $|x| \to \infty$. Die Asymptote ist als gestrichelte Linie in der Skizze des Graphen eingezeichnet.

b) $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4}$
Lösung:
Der Nenner von $f(x)$ hat die (reellen) Nullstellen $x = \pm 2$, wir erwarten also

Siehe nächstes Blatt!



dass die Funktion für alle x ausser $x = \pm 2$ definiert ist. Polynomdivision mit Rest (Serie **3**, Aufgabe **1**) ergibt

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4} = x - 2 + \frac{3}{x+2} .$$

Also ist $f(x)$ nur bei $x = -2$ nicht definiert ($x = -2$ ist eine *einfache Polstelle* von $f(x)$). Weiter hat f eine Nullstelle bei $x = \pm 1$. Wegen

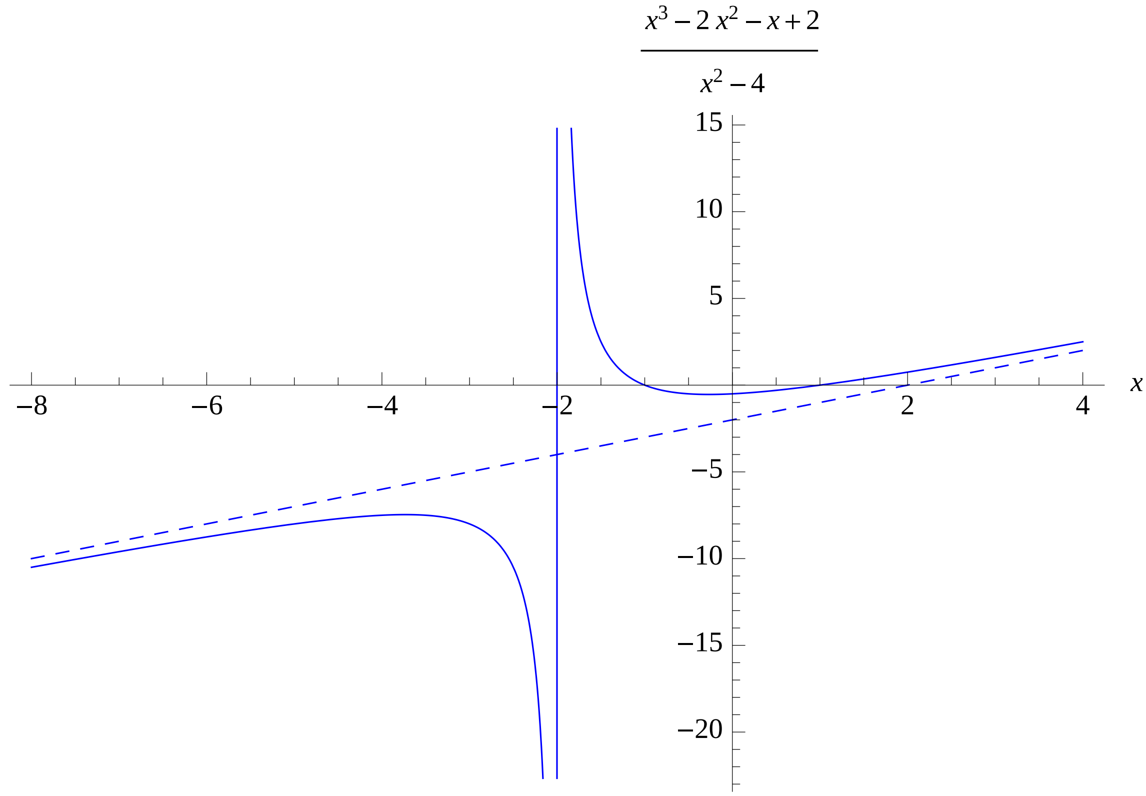
$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{x - 2 + \frac{3}{x+2}}{x-2} = \lim_{|x|\to\infty} \left(1 + \frac{3}{(x+2)(x-2)}\right) = 1$$

ist die Funktion $x - 2$ eine Asymptote von $f(x)$ für $|x| \to \infty$.

c) $f(x) = \frac{2x^3-4x^2-2x+4}{x^5-3x^4+2x^3}$
Lösung:
Der Nenner von $f(x)$ ist $x^5 - 3x^4 + 2x^3 = x^3(x-1)(x-2)$. Polynomdivision zeigt $(2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) : (x - 1) = 2x^2 - 2x - 4$. Es gilt $2x^2 - 2x - 4 = 2(x-2)(x+1)$ und man schliesst

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^5 - 3x^4 + 2x^3} = \frac{2(x+1)}{x^3} .$$

Bitte wenden!



Also ist $f(x)$ nur bei $x = 0$ nicht definiert ($x = 0$ ist eine *dreifache Polstelle* von $f(x)$). Weiter hat f eine Nullstelle bei $x = -1$. Wegen

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{2(x+1)}{x^3}}{\frac{2}{x^2}} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{2(x+1)}{2x} = 1$$

ist die Funktion $\frac{2}{x^2}$ eine Asymptote von $f(x)$ für $|x| \to \infty$.

3. Die Ableitung einer Funktion f in x ist gegeben durch

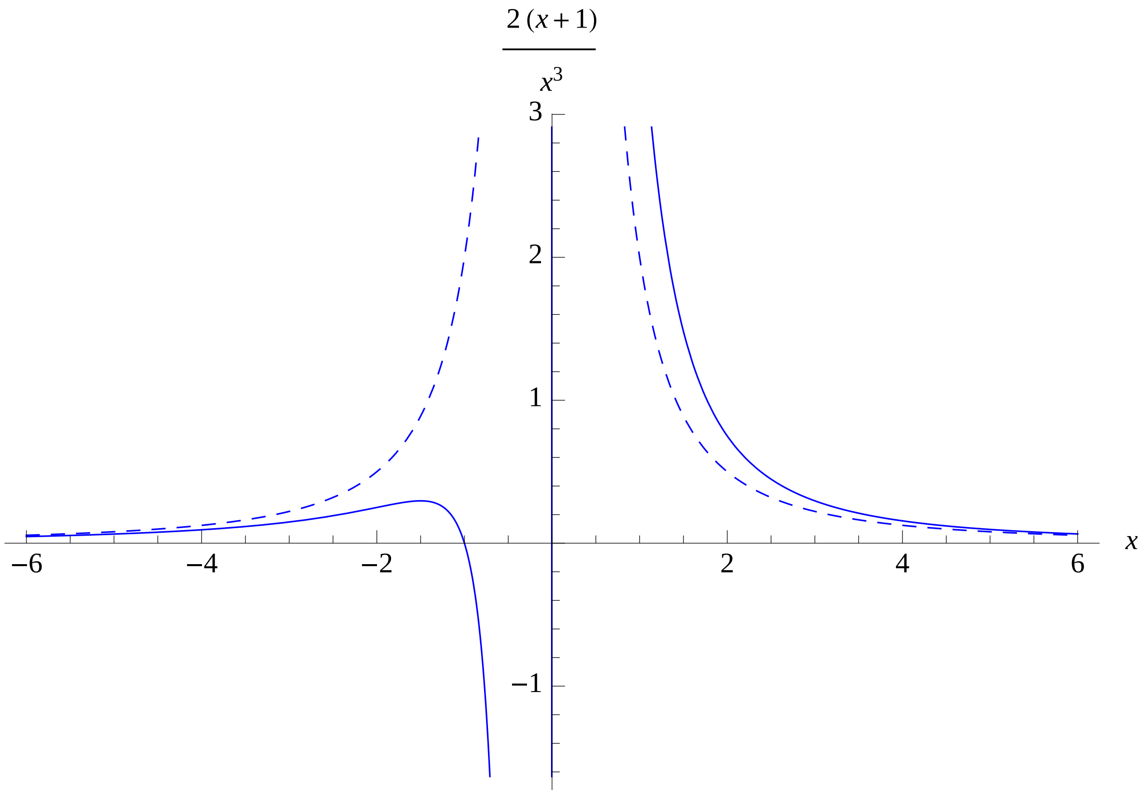
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

Verifiziere

a) Für $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$.
Lösung:
Wir berechnen

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x .$$

Siehe nächstes Blatt!



b) Für $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist $f'(x) = nx^{n-1}$.
Lösung:
Wir berechnen mit Hilfe des Binomialsatzes

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \; x^{n-k} h^{k-1} \right) = nx^{n-1} \; .
\end{aligned}$$

c) Für $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$, ist $f'(x) = af(x)$

1. nur unter Verwendung der charakterisierenden Eigenschaften der Exponentialfunktion.
2. mit Hilfe von $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Lösung:

1. Wenn $a = 0$ ist, ist e^{ax} die konstante Funktion mit Wert 1, also ist $(e^{ax})' = 0$. Im Folgenden nehmen wir $a \neq 0$ an. Wir berechnen mit Hilfe

Bitte wenden!

der Eigenschaft $e^{x+y} = e^x e^y$ der Exponentialfunktion

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{a(x+h)} - e^{ax}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ax}e^{ah} - e^{ax}}{h} = e^{ax} \lim_{h\to 0} \frac{e^{ah} - 1}{h} \ .$$

Wir erinnern uns an die zweite Eigenschaft $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon} = 1$ der Exponentialfunktion und finden

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{ah} - 1}{h} = a \lim_{h\to 0} \frac{e^{ah} - 1}{ah} = a \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = a \ ,$$

da $\varepsilon = ah \to 0$ aus $h \to 0$ folgt. Wir haben $(e^{ax})' = ae^{ax}$ gezeigt.

2. Wir betrachten die Reihendarstellung $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und berechnen gemäss der angegebenen Methode

$$\begin{aligned}(e^{ax})' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ax)^{n-1}}{(n-1)!} = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{k!} = ae^{ax} \ .\end{aligned}$$