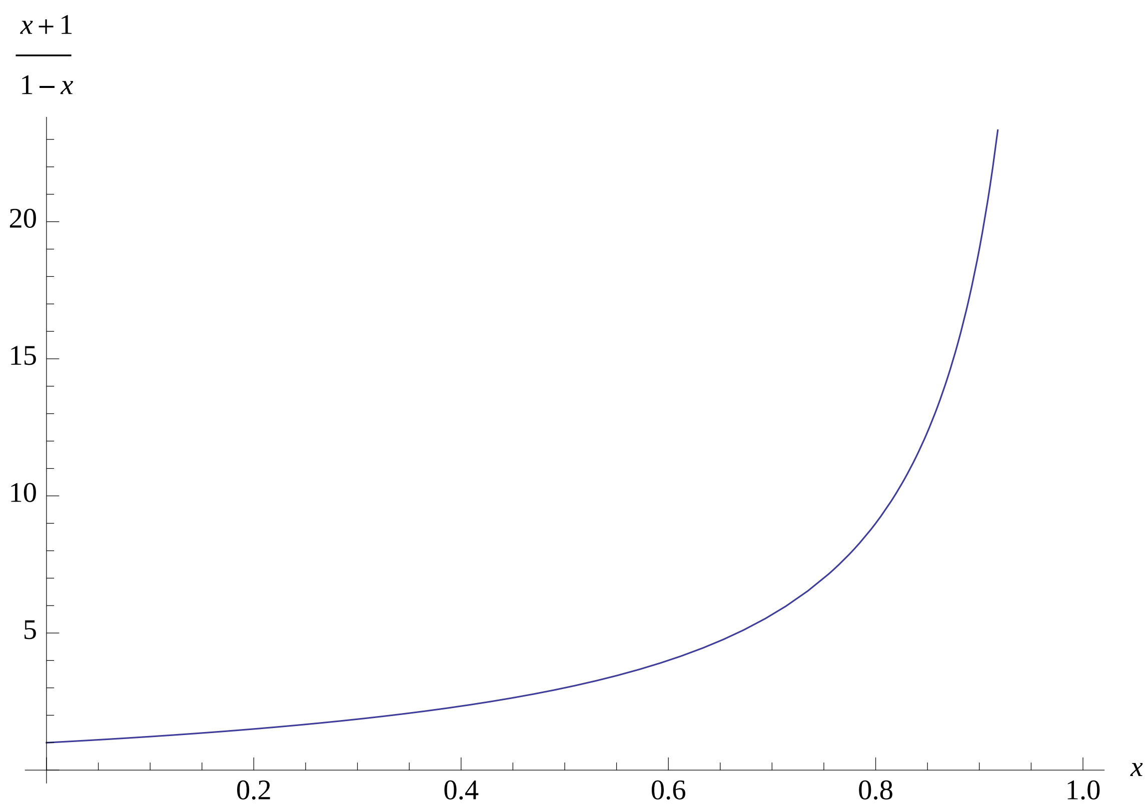
Lösung 11

1. Betrachte die Abbildung $f : (0,1) \to (0,\infty)$ gegeben durch $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

a) Zeichne den Graphen von f.
Lösung:
Der Funktionswert bei $x = 0$ ist $f(0) = 1$. Für $x \to 1$ geht der Funktionswert $f(x)$ gegen unendlich.



b) Für welche x gilt $f(x) = 2$?
Lösung:
Die Gleichung $f(x) = \frac{1+x}{1-x} = 2$ ist äquivalent zur Gleichung

$$1 + x = 2(1 - x) \ .$$

Wir lösen diese Gleichung nach x und finden $x = \frac{1}{3}$.

Bitte wenden!

c) Ist f injektiv oder surjektiv? Ist f monoton steigend oder fallend?
Lösung:
Wir prüfen, ob f injektiv ist, d.h. ob aus $f(x) = f(y)$ die Gleichheit $x = y$ folgt. Die Gleichung $f(x) = f(y)$ ist äquivalent zu

$$1 + x - y - xy = (1 + x)(1 - y) = (1 + y)(1 - x) = 1 + y - x - yx$$

und diese Gleichung ist nach Kürzen äquivalent zu $x = y$. Wir haben gezeigt, dass f injektiv ist. Wir prüfen, ob f surjektiv ist, d.h. für jeden Wert $c > 0$ ein x mit $0 < x < 1$ existiert, so dass $f(x) = c$ gilt. Wegen

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} > \frac{1-x}{1-x} = 1$$

ist dies für $c \leq 1$ nicht der Fall. Also ist f nicht surjektiv. Wir prüfen noch, ob f monoton steigend oder fallend ist. Aus $0 < x < y < 1$ folgt $1+x < 1+y$ und $1 - x > 1 - y > 0$ und deshalb

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} < \frac{1+y}{1-x} < \frac{1+y}{1-y} = f(y)\ .$$

Die Funktion f ist also strikt monoton steigend. (Daraus können wir auch schliessen, dass f injektiv ist, was wir bereits vorher direkt gezeigt haben.) Diese Eigenschaften von f sind auch aus der Skizze des Graphen in **a** ersichtlich.

d) Bestimme das Bild von f.
Lösung:
Siehe Lösung zu **e**.

e) Berechne die Umkehrfunktion $g : \mathrm{Bild}(f) \to (0, 1)$.
Lösung:
Aus der Lösung von **c** folgt, dass das Bild von f in $(1, \infty)$ enthalten ist. Sei nun $c > 1$. Die Gleichung $f(x) = c$ ist äquivalent zu

$$1 + x = c(1 - x)$$

und Auflösen der Gleichung nach x ergibt $x = \frac{c-1}{c+1}$. Es gilt

$$0 < x = \frac{c-1}{c+1} < \frac{c+1}{c+1} = 1\ .$$

Also ist jeder Wert $c > 1$ im Bild von f. Die Abbildung $f : (0, 1) \to \mathrm{Bild}(f) = (1, \infty)$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion von f ist

$$g : (1, \infty) \to (0, 1)$$

gegeben durch $g(c) = \frac{c-1}{c+1}$.

Siehe nächstes Blatt!

2. Rechne nach:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

und schreibe die Reihe bis zur Ordnung 9 explizit hin.
Lösung:
Wir verwenden die aus der Vorlesung bekannte Reihendarstellung

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\ ,$$

die für $|x| < 1$ gilt. Wenn wir x durch $-x$ ersetzen, erhalten wir

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\ ,$$

wobei wir $(-1)^{2n+1} = -1$ verwendet haben. Es folgt

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=1,\ n \text{ ungerade}}^{\infty}\frac{x^n}{n} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\ .$$

In der letzten Gleichheit haben wir folgendes verwendet: Wenn k durch $\mathbb{N}_0$ läuft, so läuft $n = 2k+1$ durch die ungeraden natürlichen Zahlen. Bis zur Ordnung 9 ist die Reihe

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots\right)\ .$$

3. Berechne $\ln(2)$ näherungsweise mit Hilfe der Reihe in **2**.

Bemerkung: Die Reihe aus **2** zusammen mit dem Resultat von **1** erlaubt die Berechnung von $\ln(c)$ für jeden Wert $c > 1$.
Lösung:
In **1b** haben wir $\frac{1+x}{1-x} = 2$ für $x = \frac{1}{3}$ gesehen. Wir berechnen die Reihe aus **2** z.B. bis zur Ordnung $3, 5$ und 7

$$\begin{aligned}\ln(2) &\approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3}\right) = \frac{56}{81} = 0.6913580247\\ &\approx \frac{56}{81} + 2\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} = \frac{842}{1215} = 0.6930041152\\ &\approx \frac{842}{1215} + 2\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7} = \frac{53056}{76545} = 0.6931347573\ .\end{aligned}$$

Bei den Dezimalentwicklungen handelt es sich um gerundete Werte. Der gerundete Wert von $\ln(2)$ ist

$$\ln(2) = 0.6931471806\ .$$