Lösung 12

1. Zeige aus den Definitionen

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ ,$$

dass folgende Identitäten gelten.

a) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$
Lösung:
Dies ist direkt aus der Definition von $\cos z$ und $e^{i(z+2\pi)} = e^{iz}e^{2\pi i} = e^{iz}$ ersichtlich.

b) $\cos(z + \pi) = -\cos z$
Lösung:
Dies ist direkt aus der Definition von $\cos z$ und $e^{i(z+\pi)} = e^{iz}e^{\pi i} = -e^{iz}$ ersichtlich.

c) $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$
Lösung:
Einsetzen von $e^{i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{iz}e^{\frac{\pi}{2}i} = ie^{iz}$ und $e^{-i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-iz}e^{-\frac{\pi}{2}i} = -ie^{-iz}$ in die Definition von $\cos z$ ergibt mit der Definition von $\sin z$

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}}{2} = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\sin z \ .$$

d) $\sin(z + 2\pi) = \sin z$
Lösung:
Dies ist direkt aus der Definition von $\sin z$ und $e^{i(z+2\pi)} = e^{iz}e^{2\pi i} = e^{iz}$ ersichtlich.

e) $\sin(z + \pi) = -\sin z$
Lösung:
Dies ist direkt aus der Definition von $\sin z$ und $e^{i(z+\pi)} = e^{iz}e^{\pi i} = -e^{iz}$ ersichtlich.

Bitte wenden!

f) $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z$

Lösung:

Einsetzen von $e^{i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{iz}e^{\frac{\pi}{2}i} = ie^{iz}$ und $e^{-i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-iz}e^{-\frac{\pi}{2}i} = -ie^{-iz}$ in die Definition von $\sin z$ ergibt mit der Definition von $\cos z$

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}}{2i} = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z\ .$$

2. Zeige

a) $\sin z - \sin w = 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$

Lösung:

Sei $s = \frac{z+w}{2}$ and $t = \frac{z-w}{2}$. Das Additionstheorem für sin (Serie 2, Aufgabe **3**, **a** und **c**) ergibt

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(s+t) = \cos s \sin t + \sin s \cos t \\ \sin w &= \sin(s-t) = -\cos s \sin t + \sin s \cos t\ . \end{aligned}$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen ist die gesuchte Identität

$$\sin z - \ \sin w = 2\cos s \sin t\ .$$

b) $\sin z$ ist auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend.

Lösung:

Sei $-\frac{\pi}{2} \ \leq w < z \leq \frac{\pi}{2}$. Dann gilt

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{z+w}{2} < \frac{\pi}{2} \qquad 0 < \frac{z-w}{2} \leq \frac{\pi}{2}\ .$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass cos auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und sin auf $(0, \pi)$ strikt positiv ist. Also ist $\cos\left(\frac{z+w}{2}\right) > 0$ und $\sin\left(\frac{z-w}{2}\right) > 0$ und wegen **a** $\sin z - \sin w > 0$. Es folgt, dass sin auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend ist.

Bemerkung: In der Vorlesung wurde mit derselben Methode gezeigt, dass cos auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist.

c) $\tan z$ ist auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend.

Lösung:

Sei $0 \leq w < z < \frac{\pi}{2}$. Nach **a** gilt $\sin z > \sin w$. Weiter gilt $0 < \cos z < \cos w$. Es folgt

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} > \frac{\sin w}{\cos w} = \tan w\ .$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir haben gezeigt, dass tan auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend ist. Wegen $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$ gilt

$$\tan(-z) = -\tan z < -\tan w = \tan(-w)$$

und deshalb ist tan auf $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ebenfalls streng monoton wachsend.

d) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ist surjektiv.

Lösung:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist als Quotient stetiger Funktionen eine stetige Funktion $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$. Nun geht $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ für $x \to \frac{\pi}{2}$, $x < \frac{\pi}{2}$, gegen $+\infty$, da $\sin x$ gegen 1 und $\cos x$ gegen 0, $\cos x > 0$, geht. Also geht $\tan x = -\tan(-x)$ für $x \to -\frac{\pi}{2}$, $x > -\frac{\pi}{2}$, gegen $-\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen (Vorlesung) existiert für jeden Wert c, $-\infty < c < +\infty$, ein x, so dass $f(x) = c$ gilt. Also ist $\tan x$ surjektiv.

3. Sei $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ die Umkehrfunktion des Tangens. Das Ziel dieser Aufgabe ist die Machinsche Formel

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) .$$

Zeige

a) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

Lösung:

Wir verwenden, dass $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ nach Aufgabe **2c** injektiv und nach **2d** surjektiv, also bijektiv ist. Deshalb existiert die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und ist bijektiv. Sei $c = \arctan(x)$ und $d = \arctan(y)$. Die Formel ist dann

$$c + d = \arctan\left(\frac{\tan c + \tan d}{1 - \tan c \tan d}\right)$$

oder äquivalent

$$\tan(c + d) = \frac{\tan c + \tan d}{1 - \tan c \tan d} .$$

Diese Formel ist das Additionstheorem für Tangens, welches in Serie 2, Aufgabe **3 b**, gezeigt wurde.

Bitte wenden!

b)

$$2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$
$$2\arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$
$$\arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$

Lösung:
Für die erste Gleichung setzen wir $x = y = \frac{1}{5}$ in die Formel aus **a** ein und berechnen $\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{5}{12}$. Für die zweite Gleichung setzen wir $x = y = \frac{5}{12}$ in die Formel ein und berechnen $\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}} = \frac{120}{119}$. Für die dritte Gleichung setzen wir $x = 1$ und $y = \frac{1}{239}$ in die Formel ein und berechnen $\frac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}} = \frac{120}{119}$.

c) die Machinsche Formel.
Lösung:
Wir bemerken $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ oder äquivalent $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ und erhalten aus der dritten Gleichung in **b**

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{120}{119}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) .$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung in **b** finden wir $\arctan\left(\frac{120}{119}\right) = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ und damit die Machinsche Formel.

Bemerkung: Mit der Machinschen Formel und der Reihe

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

lässt sich π einfach numerisch berechnen.