Lösung 13

1. Berechne die Ableitung der Funktion, wenn diese existiert.

a) $\frac{x^2+x+1}{x-1}$
Lösung:
Wir verwenden wiederholt die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel für die Ableitung (Vorlesung) und die folgenden bekannten Ableitungen

$$
\begin{aligned}
&(x^a)' = ax^{a-1}\,,\ a \in \mathbb{R}\\
&(e^x)' = e^x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}\,,\ x > 0\\
&(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = 1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Mit der Quotientenregel findet man

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x^2+x+1}{x-1}\right)' &= \frac{(x^2+x+1)'(x-1) - (x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}\\
&= \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+1)1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{3}{(x-1)^2}\,.
\end{aligned}
$$

b) $\ln(|x|)$
Lösung:
Für $x > 0$ gilt $|x| = x$ und folglich $(\ln(|x|))' = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$. Für $x < 0$ gilt $|x| = -x$ und folglich $(\ln(|x|)' = (\ln(-x))' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

c) $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x^2+1}}}$
Lösung:
Mit der Kettenregel für die Funktion $\frac{1}{y}$ findet man

$$
\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x^2+1}}}\right)' = -\frac{\left(1+e^{\frac{1}{x^2+1}}\right)'}{\left(1+e^{\frac{1}{x^2+1}}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' e^{\frac{1}{x^2+1}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x^2+1}}\right)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}\frac{1}{e^{-\frac{1}{x^2+1}} + 2 + e^{\frac{1}{x^2+1}}}\,.
$$

Bitte wenden!

d) $\frac{|x|^3-5|x|}{x^2+|x|}$

Lösung:

Sei $x > 0$. Dann ist $|x| = x$ und folglich mit der Quotientenregel

$$\left(\frac{|x|^3 - 5|x|}{x^2 + |x|}\right)' = \left(\frac{x^2-5}{x+1}\right)' = \frac{2x(x+1) - (x^2-5)1}{(x+1)^2} = 1 + \frac{4}{(x+1)^2} \; .$$

Genauso findet man für $x < 0$

$$\left(\frac{|x|^3 - 5|x|}{x^2 + |x|}\right)' = \left(\frac{-x^2+5}{x-1}\right)' = \frac{(-2x)(x-1) - (-x^2+5)1}{(x-1)^2} = -1 - \frac{4}{(x-1)^2} \; .$$

e) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Lösung:

Mit der Ketten- und Quotientenregel findet man

$$\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}\frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1-x^2} \; .$$

Alternativ berechnet man mit der Kettenregel

$$\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = (\ln(1+x) - \ln(1-x))' = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} \; .$$

f) $\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$

Lösung:

Mit der Quotienten- und Kettenregel findet man

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}\right)' &= \frac{(\ln(1+x))' \ln(1-x) - \ln(1+x)(\ln(1-x))'}{(\ln(1-x))^2} \\ &= \frac{\frac{1}{1+x}\ln(1-x) + \ln(1+x)\frac{1}{1-x}}{(\ln(1-x))^2} \; .\end{aligned}$$

g) $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Lösung:

Mit Produkt- und Kettenregel findet man

$$\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 1\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{1}{x}\right)'\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \; .$$

h) $\tan(e^x)$

Lösung:

Mit der Kettenregel findet man

$$(\tan(e^x))' = (e^x)' \tan'(e^x) = e^x(1 + \tan(e^x)^2) \; .$$

Siehe nächstes Blatt!

i) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
Lösung:
Mit der Quotienten- und Kettenregel findet man

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)' &= \frac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{e^{2x}+e^{-2x}+2}\ .\end{aligned}$$

j) $(\ln(x))^x$
Lösung:
Wir bemerken $(\ln(x))^x = e^{x\ln(\ln(x))}$ und finden mit der Ketten- und Produktregel

$$\begin{aligned}\left(e^{x\ln(\ln(x))}\right)' &= (x\ln(\ln(x)))' e^{x\ln(\ln(x))} = \left(1\ln(\ln(x)) + x\frac{(\ln(x))'}{\ln(x)}\right) e^{x\ln(\ln(x))} \\ &= \left(\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)}\right)(\ln(x))^x = (\ln(x)\ln(\ln(x))+1)(\ln(x))^{x-1}\ .\end{aligned}$$

k) x^{x^x}
Lösung:
Wir bemerken $x^x = e^{x\ln(x)}$ und finden mit der Ketten- und Produktregel

$$\left(e^{x\ln(x)}\right)' = (x\ln(x))' e^{x\ln(x)} = (1\ln(x) + x\frac{1}{x})x^x = (\ln(x)+1)x^x\ .$$

Wegen $x^{x^x} = e^{x^x\ln(x)}$ erhalten wir mit der Ketten- und Produktregel

$$\begin{aligned}\left(e^{x^x\ln(x)}\right)' &= (x^x\ln(x))'\ e^{x^x\ln(x)} = \left((\ln(x)+1)x^x\ln(x) + x^x\frac{1}{x}\right) x^{x^x} \\ &= \left((\ln(x)+1)\ln(x)+\frac{1}{x}\right) x^{x(1+x^{x-1})}\ .\end{aligned}$$

l) $\sin(1+\cos(x^2+1))$
Lösung:
Wir berechnen mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}\left(\sin(1+\cos(x^2+1))\right)' &= (1+\cos(x^2+1))'\cos(1+\cos(x^2+1)) \\ &= (x^2+1)'(-\sin(x^2+1))\cos(1+\cos(x^2+1)) \\ &= -2x\sin(x^2+1)\cos(1+\cos(x^2+1))\ .\end{aligned}$$

Bitte wenden!

m) $\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$
Lösung:
Wir berechnen mit der Quotienten- und Kettenregel

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\right)' = \frac{x'\,\sqrt{x^4+1} - x\sqrt{x^4+1}'}{x^4+1} = \frac{\sqrt{x^4+1} - x(4x^3)\frac{1}{2}(x^4+1)^{-\frac{1}{2}}}{x^4+1}$$
$$= \frac{1-x^4}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}\ .$$

n) $\frac{(x^6+1)^{\frac{3}{4}}}{x^5+x^{\frac{4}{3}}+1}$
Lösung:
Wir berechnen mit der Quotienten- und Kettenregel

$$\left(\frac{(x^6+1)^{\frac{3}{4}}}{x^5+x^{\frac{4}{3}}+1}\right)' = \frac{6x^5\ \frac{3}{4}(x^6+1)^{\frac{3}{4}-1}(x^5+x^{\frac{4}{3}}+1) - (x^6+1)^{\frac{3}{4}}(5x^4+\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1})}{(x^5+x^{\frac{4}{3}}+1)^2}$$
$$= \frac{-3x^{10}+19x^{\frac{19}{3}}+27x^5-30x^4-8x^{\frac{1}{3}}}{6(x^6+1)^{\frac{1}{4}}(x^5+x^{\frac{4}{3}}+1)^2}\ .$$

o) $\frac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}}$
Lösung:
Wir vereinfachen zuerst den Bruch

$$\frac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}} = \frac{x(x^2+2)}{x^4+3x^2+1}$$

und verwenden dann die Quotientenregel

$$\left(\frac{x(x^2+2)}{x^4+3x^2+1}\right)' = \frac{(3x^2+2)(x^4+3x^2+1) - x(x^2+2)(4x^3+6x)}{(x^4+3x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-x^6-3x^4-3x^2+2}{(x^4+3x^2+1)^2}\ .$$

p) $\frac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x+\dots}}}}$ (unendlich fortgesetzt), $x>0$
Lösung:
Die gegebene Funktion erfüllt $f(x) = \frac{1}{x+f(x)}$. Wir lösen diese quadratische Gleichung nach $f(x)$ auf und erhalten $f(x) = \frac{-x\pm\sqrt{x^2+4}}{2}$. Wenn $x>0$ ist, so ist $f(x)>0$, also gilt dann $f(x) = \frac{-x+\sqrt{x^2+4}}{2}$. Mit der Kettenregel berechnen

Siehe nächstes Blatt!

wir die Ableitung

$$\left(\frac{-x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(-1+(2x)\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(-1+x(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \frac{-x^2+x-4}{2(x^2+4)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

2. Bestimme die globalen Maxima und Minima der Funktion.

a) $f : [-1, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$
Lösung:
Die Funktion f ist ein Polynom und deshalb überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3) = 12x(x-1)(x-3)$. Die Ableitung $f'(x)$ verschwindet also in $x = 0, 1, 3$. Die entsprechenden Funktionswerte $f(0) = 0$, $f(1) = 5$ und $f(3) = -27$ zusammen mit den Randwerten $f(-1) = 37$ und $f(4) = 32$ enthalten die globalen Maxima und Minima von f (Vorlesung). Das globale Maximum von f ist demnach $f(-1) = 37$ und das globale Minimum ist $f(3) = -27$.

b) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -2-x & x \le -1 \\ -x^2 & x \ge -1 \end{cases}$
Lösung:
Die Funktion f ist stückweise ein Polynom und folglich ausser in $x = -1$ differenzierbar. Die Ableitung ist

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ -2x & x > -1 \end{cases}$$

und verschwindet also nur für $x = 0$. In $x = -1$ ist die Funktion stetig, aber nicht differenzierbar. Die globalen Maxima und Minima von f befinden sich unter den Funktionswerten $f(0) = 0$, $f(-1) = -1$ und den Randwerten $f(-2) = 0$ und $f(2) = -4$. Das globale Maximum von f ist also $f(0) = f(-2) = 0$ und das globale Minimum ist $f(2) = -4$.

c) $f : [-2, 0.5] \to \mathbb{R},\ f(x)$ wie in **b**.
Lösung:
Wegen **b** ist nur noch der Randwert $f(0.5) = -\frac{1}{4}$ zu bestimmen. Das globale Maximum von f ist mit den Resultaten aus **b** $f(0) = f(-2) = 0$ und das globale Minimum $f(-1) = -1$.

Bitte wenden!

3. Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass die Funktion

$$h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \ , \ x > 0$$

streng monoton wächst. Zeige

a) $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ erfüllt $f(0) = 0$ und $f'(x) > 0$ für $x > 0$.
Lösung:
Einsetzen ergibt $f(0) = 0$. Wir berechnen die Ableitung mit der Ketten- und Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1(1+x) - x1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0 \ .$$

b) Es gilt $f(x) > 0$.
Lösung:
Dies ist eine direkte Konsequenz aus **a**, da $f'(x) > 0$ für $x > 0$ impliziert, dass $f(x)$ streng monoton wächst. Also gilt $f(x) > f(0) = 0$.

c) Es gilt $g'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ für $g(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, also ist g streng monoton wachsend.
Lösung:
Wir berechnen die Ableitung von g mit der Produkt- und Kettenregel

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = f\left(\frac{1}{x}\right) \ . \end{aligned}$$

Tatsächlich folgt nun mit **b** wegen $g'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$, dass g streng monoton wachsend ist.

d) $h(x) = e^{g(x)}$ ist streng monoton wachsend.
Lösung:
Wegen $(e^x)' = e^x > 0$ für alle reellen x ist e^x streng monoton wachsend. Sei $y > x$. Mit **c** ist $g(y) > g(x)$ und deshalb $h(y) = e^{g(y)} > h(x) = e^{g(x)}$. Wir haben gezeigt, dass h streng monoton wachsend ist.