Serie 3

1. Führe die Polynomdivision mit Rest durch.

a) $(x^5 - x^4 + x^2 - 1) : (x - 1)$

b) $(x^4 + x^3) : (x^3 - x + 1)$

c) $(2x^4 + 2x^3 + x^2) : (2x^2 - 1)$

d) $(ix^4 + x) : (ix^2 + 1)$

2. Das Polynom $p(x) = 6x^5 - 45x^4 + 110x^3 - 90x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, hat lokale Extrema an den Stellen $x = 0, 1, 2, 3$.

a) Skizziere p.

b) Für welche Werte von c hat p 5 reelle Nullstellen, 3 reelle und 2 komplexe Nullstellen, 1 reelle und 4 komplexe Nullstellen?

c) Können in **b** andere Fälle auftreten?

3. *(Lagrange-Interpolationspolynome vom Grad 3)* Sei $p_k(x)$, $k = 0, 1, 2, 3$, das Polynom vom Grad 3, für welches $p_k(n) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$, $n = 0, 1, 2, 3$, gilt.

a) Berechne $p_k(x)$ in der Form $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

b) Sei $p(x)$ ein Polynom mit $p(n) = y_n$, $n = 0, 1, 2, 3$. Zeige

$$p(x) = y_0p_0(x) + y_1p_1(x) + y_2p_2(x) + y_3p_3(x)\ .$$

c) Berechne das Polynom $p(x)$, für welches

$$p(0) = -15 \quad p(1) = -1 \quad p(2) = 1 \quad p(3) = 15$$

gilt.

Bitte wenden!

4. Multiple Choice.

1. Seien x_1, x_2, x_3, x_4 verschiedene reelle Zahlen. Seien y_1, y_2, y_3, y_4 reelle Zahlen. Welche der Aussagen gilt?

(a) Es existiert ein (echt) quadratisches Polynom p, so dass

$$p(x_1) = y_1 \quad p(x_2) = y_2 \quad p(x_3) = y_3 \quad p(x_4) = y_4$$

gilt.

(b) Es existiert ein Polynom p vom Grad ≤ 2, so dass

$$p(x_1) = y_1 \quad p(x_2) = y_2 \quad p(x_3) = y_3$$

gilt.

(c) Es existiert ein (echt) quadratisches Polynom p, so dass

$$p(x_1) = y_1 \quad p(x_2) = y_2 \quad p(x_3) = y_3$$

gilt.

(d) Es existieren unendlich viele quadratische Polynome p, so dass

$$p(x_1) = y_1 \quad p(x_2) = y_2$$

gilt.

2. Zu den ersten drei Teilaufgaben der ersten Aufgabe: Ist das Polynom p eindeutig, wenn es existiert?

(a) Ja.

(b) Nein.

Siehe nächstes Blatt!

3. An einer Party sind n Leute. Wenn jede Person mit jeder anderen anstösst, wievielmal stossen die Gläser aneinander?

(a) Binomialkoeffizient $\binom{n}{2}$

(b) $\frac{n(n-1)}{2}$

(c) n^2

(d) $n(n-1)$

4. Es stehen n Personen um einen Tisch. Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei Personen unter ihnen an den Tisch zu setzen, wenn die Sitzordnung keine Rolle spielt?

(a) $n(n-1)(n-3)$

(b) $n(n+1)(n-1)$

(c) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

(d) Binomialkoeffizient $\binom{n}{3}$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, 13.10.2014, in der Übungsstunde.

Vorlesungshomepage: `http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/mathematik1_CHAB`