Serie 4

1. Berechne

a) $10!$ **c)** $\binom{7}{3}$ **e)** $\binom{45}{6}$ **g)** $\binom{20}{10}$

b) $12!$ **d)** $\binom{28}{26}$ **f)** $\binom{49}{6}$

2. *(Chu-Vandermonde-Identität)*

a) Zeige mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}.$$

Hinweis: $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$

b) Folgere aus **a**: $\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$

c) Berechne $\binom{10}{5}$ mit Hilfe von **b** und durch Aufstellen des Pascalschen Dreiecks.

d) Gib ein kombinatorisches Argument für die Identität in **a**.

3. *(Trinomische Formel)*

a) Zeige, dass der binomische Lehrsatz als

$$(a+b)^n = \sum_{\substack{0\leq j,k\leq n\\ j+k=n}} \frac{n!}{j!k!} a^j b^k$$

geschrieben werden kann.

b) Verifiziere, dass

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{0\leq j,k,l\leq n\\ j+k+l=n}} \frac{n!}{j!k!l!} a^j b^k c^l$$

gilt.

c) Multipliziere $(a+b+c)^5$ aus.

Bitte wenden!

4. Multiple Choice.

1. Sei p eine Primzahl. Wahr oder falsch: p teilt $\binom{p}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

2. Ist die Aussage der ersten Frage wahr, wenn p nicht prim ist?

(a) Ja.

(b) Nein.

3. Der Wert von $\sum_{j=0}^{n} 2^j \binom{n}{j}$ ist

(a) $2^n + 1$.

(b) 2^{2n}.

(c) 3^n.

4. Der Wert von $(-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \frac{1}{2^{n-j}}$ ist

(a) 2^{-n}.

(b) $(-1)^n 2^{-n}$.

(c) 2^{-n-1}.

(d) $\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, 20.10.2014, in der Übungsstunde.

Vorlesungshomepage: `http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/mathematik1_CHAB`